DEFORMACIÓN CONFORME DE MÉTRICAS SOBRE UNA VARIEDAD CUYA FRONTERA TIENE DOS COMPONENTES CONEXAS

MARÍA FERNANDA ESPINAL FLOREZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2016

DEFORMACIÓN CONFORME DE MÉTRICAS SOBRE UNA VARIEDAD CUYA FRONTERA TIENE DOS COMPONENTES CONEXAS

MARÍA FERNANDA ESPINAL FLOREZ

Trabajo de investigación para optar al Título de Magister en Matemáticas

Director

Gonzalo García Ph.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI

2016

Índice general

Resumen

Dada una variedad Riemanniana suave (M, g) $n-$dimensional, $n \geq 3$, cuya frontera ∂M es la unión de dos componentes conexas $(\partial M)_1$ y $(\partial M)_2$ se plantea el problema de prescribir tanto la curvatura escalar como la curvatura media de la frontera. El problema de estudio consiste en demostrar la existencia de una métrica $\tilde{g}$ puntualmente conforme a la métrica g de tal manera que la curvatura escalar con la nueva métrica sea $\tilde{R} \equiv 0$ y la curvatura media sobre la frontera $\tilde{h}_i$ sea constante sobre cada una de las componentes conexas $(\partial M)_i$ para $i = 1, 2$ con $\tilde{h}_1 \neq \tilde{h}_2$. El problema es equivalente a encontrar una solución positiva suave u de tal manera que $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ donde u es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)} R(g) u = 0, & \text{en} \quad M \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} h_1(g) u = \frac{n-2}{2} \tilde{h}_1 u^{\frac{n}{n-2}}, & \text{sobre} \quad (\partial M)_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} h_2(g) u = \frac{n-2}{2} \tilde{h}_2 u^{\frac{n}{n-2}}, & \text{sobre} \quad (\partial M)_2 \end{cases} \tag{1}$$

donde R es la curvatura escalar de M, h_1, h_2 son las curvaturas medias de las componentes conexas $(\partial M)_1, (\partial M)_2$ de ∂M y η es el vector normal con respecto a la métrica g.

En el trabajo de investigación se demostró la existencia de soluciones para el problema subcrítico

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)} R(g) u = 0, & \text{en} \quad M, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} h_1(g) u = \frac{n-2}{2} \tilde{h}_1 u^{q-1}, & \text{sobre} \quad (\partial M)_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} h_2(g) u = \frac{n-2}{2} \tilde{h}_2 u^{q-1}, & \text{sobre} \quad (\partial M)_2, \end{cases} \tag{2}$$

donde $2 < q < \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Adicionalmente mostramos que el cociente de Sobolev en el exponente crítico $G_{0,b}(M)$ está acotado superiormente por el cociente $G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$. Este resultado junto con los resultados obtenidos para el problema subcrítico 2 son fundamentales para resolver el problema crítico.

Introducción

En 1984, R. Shoen [18] mostró que una variedad compacta sin frontera es conformemente equivalente a una variedad con curvatura escalar constante. Este teorema es conocido como el problema de Yamabe porque Yamabe [22] en 1960 creyó haber resuelto éste problema. En su demostración usó técnicas de ecuaciones diferenciales elípticas y cálculo variacional. En 1968, Trudinger [21] descubrió un error en la prueba, lo que generó una gran investigación en el tema. En 1984, Schoen [18], después de los trabajos de Yamabe [22], Trudinger [21], y Aubin [1], completó la prueba del así llamado problema de Yamabe. Después del problema de Yamabe, Escobar se planteó una pregunta similar en variedades con frontera: Dada una variedad Riemanniana compacta y con frontera M, $n \geq 3$, existe una métrica conforme con curvatura escalar constante en M y curvatura media constante en ∂M?. Este problema llamado el Problema de Yamabe para variedades con frontera fué resuelto por Escobar en [6] en el año 1992.

Dada (M^n, g) una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional con frontera y $n \geq 3$, sea $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ una métrica conforme a la métrica g. La relación entre la curvatura escalar de la métrica g, $R(g)$, y la curvatura escalar de la métrica $\tilde{g}$ está dada por

$$R(\tilde{g}) = -\frac{4(n-1)}{n-2}\frac{\mathrm{L}u}{u^{(n+2)/(n-2)}}, \qquad \mathrm{L} = \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)}R(g), \tag{3}$$

donde Δ es el operador Laplaciano calculado con respecto a la métrica g. La relación entre la curvatura media de la frontera de M, ∂M, con respecto a la métrica g, $h(g)$, y la curvatura media de ∂M, con respecto a la métrica $\tilde{g}$, $h(\tilde{g})$, está dada por la ecuación

$$h(\tilde{g}) = \frac{2}{n-2}\frac{\mathrm{B}u}{u^{n/(n-2)}}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h(g) \tag{4}$$

donde $\partial\eta$ es la derivada normal exterior calculada con respecto a la métrica g.

Dicho problema resulta equivalente a la existencia de soluciones positivas de un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales semilineales, la primera elíptica en el interior de la variedad y la segunda del tipo condición de Newmann en la frontera de la misma en el caso de variedades con frontera.

En [6], Escobar mostró que toda variedad Riemanniana compacta con frontera es conformemente equivalente a una con curvatura escalar constante y curvatura media cero sobre la frontera. Para probar ésta equivalencia, demostró la existencia de una solución positiva suave a una ecuación diferencial parcial semilineal elíptica con una condición lineal de frontera.
Más precisamente, mostró que para toda variedad Riemanniana compacta (M^n, g), el problema:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)}R(g)u + \frac{n-2}{4(n-1)}\lambda u^{(n+2)/(n-2)} = 0, & \text{en} \quad M \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h(g)u = 0, & \text{en} \quad \partial M \end{cases} \tag{5}$$

tiene una solución positiva suave, donde λ es una constante cuyo signo depende de la clase conforme de la métrica g.

Posteriormente, Escobar en [11] demostró la existencia de una función positiva suave definida sobre M que satisface las ecuaciones 3 y 4 con $R(\tilde{g})$ y $h(\tilde{g})$ constantes. Con el fin de mostrar la existencia de dicha métrica demostró que existe una solución positiva suave al problema

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)}R(g)u + \lambda u^{(n+2)/(n-2)} = 0, & \text{en} \quad M \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h(g)u = \mu u^{n/(n-2)}, & \text{en} \quad \partial M \end{cases} \tag{6}$$

donde λ y μ son constantes. Más aún, Escobar logró demostrar que la ecuación 6 tiene solución positiva suave en la norma H^1 que tiende a la solución minimal del problema 5, probado en [6].

Esta investigación tiene como objetivo principal contribuir a la resolución del problema de deformación conforme de métricas sobre una variedad Riemanniana M, de la métrica g a una métrica $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ con curvatura escalar $\tilde{R}$ plana y curvaturas medias constantes $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, con $\tilde{h}_1 \neq \tilde{h}_2$ sobre $(\partial M)_1$ y $(\partial M)_2$ respectivamente. Para ello tomamos como referencia bibliográfica el artículo *Conformal Deformation of a Riemannian Metric* del profesor J. Escobar ([11]).
Más específicamente, enunciamos nuestro problema a continuación.

PROBLEMA: Dada una variedad Riemanniana $n-$dimensional compacta con frontera ∂M compuesta por dos componentes conexas $(\partial M)_1$ y $(\partial M)_2$ con $n \geq 3$, queremos demostrar las existencia de una métrica conforme a g con curvatura escalar cero y curvaturas media constantes b, d sobre cada componente conexa de la frontera. El problema es equivalente a encontrar una solución positiva suave del problema de valor inicial no lineal sobre M

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{n-2}{4(n-1)}R(g)u = 0, & \text{en} \quad M \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h_1(g)u = \frac{\lambda}{2}bqu^{q-1}, & \text{en} \quad (\partial M)_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h_2(g)u = \frac{\lambda}{2}dqu^{q-1}, & \text{en} \quad (\partial M)_2 \end{cases} \tag{7}$$

donde λ es una constante cuyo signo depende de la clase conforme de la métrica g, R es la curvatura escalar de M, h_1, h_2 son las curvaturas medias de las componentes conexas $(\partial M)_1, (\partial M)_2$ de ∂M y $\partial\eta$ es el vector normal con respecto a la métrica g.

Si $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$, de las leyes de transformación 3 y 4 resulta M con curvatura escalar $\tilde{R} = 0$ y frontera con curvaturas medias constantes $\tilde{h}_1 = \frac{\lambda bq}{n-2}$ y $\tilde{h}_2 = \frac{\lambda dq}{n-2}$ sobre cada componente conexa con respecto a la métrica $\tilde{g}$.

Con el fin de resolver éste problema, se define para $u \in \mathbf{C}^1(\overline{M})$ la energía de u, $E(u)$, por

$$E(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R u^2 dv + \int_{(\partial M)_1} h_1 u^2 d\sigma + \int_{(\partial M)_2} h_2 u^2 d\sigma$$

donde dv y $d\sigma$ representan la medida Riemanniana sobre M y ∂M inducida por la métrica g. Se estudia la funcional E restringida al conjunto

$$C^q_{a,b,d} = \left\{ u \in \mathbf{C}^1(M) : a \int_M |u|^p + b \int_{(\partial M)_1} |u|^q + d \int_{(\partial M)_2} |u|^q = 1 \right\}$$

donde: ó $a > 0$ y b, d son números reales ó $a = 0$ y $b > 0$. Los números $p = 2n/(n-2)$ y $q = 2(n-1)/(n-2)$ son críticos para el Teorema de Encaje de Sobolev. En efecto, los encajes $H^1(M) \hookrightarrow L^P(M)$, y $H_1(M) \hookrightarrow L^q(\partial M)$ son compactos para $1 < p < 2n/(n-2)$ y $1 < q < 2(n-1)/(n-2)$.

En éste trabajo mostramos que para $1 < q < 2(n-1)/(n-2)$, el funcional E tiene un minimizador suave positivo con energía $G^q_{0,b,d}(M)$, donde

$$G^q_{0,b,d}(M) = \inf\{E(u) : u \in C^q_{0,b,d}\}$$

dicho minimizador es una solución del problema subcrítico 2.

Cuando $q = 2(n-1)/(n-2)$ demostramos que $G^q_{0,b}(M)$ está acotado superiormente por el cociente de Sobolev $G^q_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$.

Este trabajo está organizado como sigue: en el capítulo 1 se presentan algunos conceptos básicos de Análisis Variacional, Ecuaciones Diferenciales Parciales y geometría Riemmaniana como soporte teórico del trabajo. En el capítulo 2 se definen los cocientes de Sobolev $G^{p,q}_{a,b,d}(M)$, $G^q_{0,b,d}(M)$ y $G_{0,b}(M)$ y demostramos que $G^q_{0,b}(M)$ está acotado superiormente por $G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$. Finalmente, en el capítulo 3 probamos la existencia de una solución positiva suave para el problema subcrítico 2.

Capítulo 1

Preliminares

En éste capítulo presentamos algunos conceptos básicos de Análisis Variacional y Ecuaciones Diferenciales Parciales siguiendo el libro Postmodern Analysis de Jürgen Jost [23] y algunos conceptos de Geometría Riemanniana siguiendo el trabajo de investigación de Carolina Garcia [24] que serán empleados en el desarrollo de éste trabajo.

1.1. Análisis Variacional y Ecuaciones Diferenciales Parciales

Empezamos ésta sección definiendo qué es un espacio de Hilbert y un espacio de Sobolev. Además de enunciar buenas propiedades de éstos espacios que los convierten en candidatos para buscar soluciones de nuestro problema.

Recordemos que un espacio de Banach es un espacio vectorial normado, el cual es completo bajo la métrica asociada con la norma. Por ejemplo, el espacio l^p es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.1 *Un espacio real (complejo) de Hilbert H es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ dotado con un producto escalar*

$$(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

con las siguientes propiedades

1. $(x, y) = (y, x)((x, y) = \overline{(y, x)}$ *respectivamente) para todo* $x, y \in H$.
2. $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x_1, x_2, y \in H$.
3. $(x, x) > 0$ *para todo* $x \neq 0$, $x \in H$.
4. *H es completo con respecto a la norma $\|x\| := (x, x)^{1/2}$, ésto es, toda sucesión de Cauchy converge a un punto límite en H en la norma $\|\cdot\|$.*

Ejemplos de espacios de Hilbert son:

1. El espacio $\mathrm{L}^2(U)$ con el producto interno $(f, g) = \int_U f(x)g(x)dx$.
2. Los espacios de Sobolev $\mathrm{W}^{k,2}(U)$ con

$$(f, g)_{W^{k,2}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_U D_\alpha f(x) \cdot D_\alpha g(x) dx$$

donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2 *Asuma U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $1 \leq p \leq \infty$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es medible, se define*

$$\|f\|_{L^p(U)} := \begin{cases} \left(\int_U |f|^p dx\right)^{1/p} & , si \quad 1 \leq p < \infty \\ ess\ sup_U |f|, & si \quad p = \infty \end{cases}$$

El espacio lineal de todas las funciones medibles $f : U \to \mathbb{R}$ tales que $\|f\|_{L^p(U)} < \infty$ se denota por L^p.

Notemos que, para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(U)$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.1 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en L^p entonces una subsucesión de (f_n) converge puntualmente a f casi en todas partes (c.t.p).*

Definición 1.3 *Sea H un espacio de Hilbert. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es débilmente convergente a $x \in H$ si $(x_n, y) \to (x, y)$ para todo $y \in H$. En símbolos, $x_n \rightharpoonup x$.*

Como $|(x_n, y) - (x, y)| \leq \|x_n - x\| \cdot \|y\|$ por la desigualdad de Schwarz, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en el sentido usual es también débilmente convergente.
Sin embargo, una sucesión débilmente convergente no necesariamente converge en el sentido usual como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 *Toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert tiene una subsucesión débilmente convergente.*

Definición 1.4 ***Semicontinuidad Inferior**.*
Sea X un espacio métrico, $x \in X$. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es llamada semicontinua inferiormente en x si para todo $c \in \mathbb{R}$ con $c < f(x)$ existe una vecindad U de x tal que para todo $y \in U$, $c < f(y)$.

Teorema 1.3 *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x, entonces*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Por tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x precisamente cuando ésta converge débilmente a x y además

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(Por tanto, la norma es semicontinua inferiormente con respecto a la convergencia débil.)

Teorema 1.4 *Toda sucesión débilmente convergente* $(x_n) \subset H$ *es acotada.*

Teorema 1.5 *Si* X *es un espacio de Banach y* $E \in C^1(X)$ *es acotada inferiormente, existe una sucesión* $\{x_m\} \subset X$ *del funcional* E *tal que*

$$E(x_m) \to \inf_X E \qquad \textit{cuando} \qquad m \to \infty.$$

Diremos que $\{x_m\}$ *es una sucesión minimizante.*

Definición 1.5 *Para* $k = 0, 1, 2, 3..., \infty$ *se define*

$$C_0^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) : suppf \subset\subset \Omega\}.$$

Las funciones $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se denominan funciones de prueba.
Existe una estrecha relación entre los conjuntos $C_0^k(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$ que se enuncia en la proposición siguiente.

Proposición 1.1 $C_0^\infty(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$.

Diremos que dos funciones f, g son iguales en $\mathrm{L}^2(\Omega)$ si son iguales casi en todas partes, esto es, si $m(\{f \neq g\}) = 0$.

Proposición 1.2 *Sea* $f \in L^2(\Omega)$. *Suponga que para toda* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *se tiene*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Entonces $f \equiv 0$.

A continuación introducimos el concepto de derivada débil, el cual juega un papel importante en el desarrollo de nuestro problema.
Las derivadas débiles son introducidas a partir de la fórmula de integración por partes. Los espacios de funciones que están en L^p junto con ciertas derivadas débiles son llamados espacios de Sobolev. El teorema de Encaje de Sobolev dice que tales funciones son continuas si sus derivadas en el sentido débil satisfacen propiedades de integrabilidad suficientemente fuertes.

Lema 1.1 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$. Para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i} dx = 0.$$

Del lema anterior se deduce que para $f \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, (y así $f\varphi \in C_0^1(\Omega)$),

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x)dx,$$

usando la regla del producto para diferenciación.
Por iteración se obtiene para $f \in C^2(\Omega)$, $\varphi \in C_0^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 f(x)}{(\partial x^i)^2}\varphi(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x)dx = \int_\Omega f(x)\frac{\partial^2 \varphi(x)}{(\partial x^i)^2}dx,$$

y sumando sobre i finalmente se obtiene

$$\int_\Omega \Delta f(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega \text{grad} f(x) \cdot \text{grad}\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\Delta\varphi(x)dx$$

donde el punto $\cdot$ de la integral del medio denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.6 *El conjunto de funciones localmente integrables se define por*

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : f \in L^1(\Omega') \quad \textit{para todo} \quad \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

Las fórmulas anteriores se usarán como una motivación para introducir un concepto de diferenciación para funciones que no necesariamente son diferenciables en el sentido clásico.

Definición 1.7 *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es llamada la derivada débil de f en la dirección $x^i(x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n)$ si*

$$\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i}dx$$

para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ y se denota por $v = D_i f$. si f tiene derivada débil para todo $i = 1, 2, ..., n$, se escribe $Df = (D_1 f, D_2 f, .., D_n f)$.

Obviamente, si $f \in C^1(\Omega)$, entonces f tiene derivadas en el sentido débil, a saber

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Sin embargo, existen funciones que tienen derivadas en el sentido débil, pero no están en $C^1(\Omega)$. Por otra parte, no toda función en $L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada débil.

Ejemplo 1.1 *Sean $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ y $f(x) = |x|$. Entonces f tiene derivada débil*

$$Df(x) = \begin{cases} 1, & si \ \ 0 \leq x < 1 \\ -1, & si \ \ -1 < x < 0, \end{cases}$$

ya que para toda $\varphi \in C^1_0((-1,1))$ se tiene

$$\int_{-1}^{0} (-\varphi(x))dx + \int_{0}^{1} \varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} \varphi'(x) \cdot |x| dx.$$

Ejemplo 1.2

$$f(x) := \begin{cases} 1, & si \ \ 0 \leq x < 1 \\ 0, & si \ \ -1 < x < 0, \end{cases}$$

no tiene derivada en el sentido débil, pues $Df(x)$ debería entonces ser cero para $x \neq 0$ y por tanto, por ser una función en $L^1_{loc}((-1,1))$, $Df \equiv 0$. Sin embargo, no se cumple para toda $\varphi \in C^1_0(-1,1)$ que

$$0 = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \cdot 0 dx = -\int_{-1}^{1} \varphi'(x) f(x) dx = -\int_{0}^{1} \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

El concepto de derivada débil en orden más alto se define de forma análoga.

Definición 1.8 *Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1, ..., n)$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$,*

$$D_\alpha \varphi := (\frac{\partial}{\partial x^1})^{\alpha_1} ... (\frac{\partial}{\partial x^n})^{\alpha_n} \varphi para \quad \varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega).$$

Una función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es llamada la $\alpha-$ésima derivada débil de f, en símbolos $v = D_\alpha f$ si

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \cdot D_\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^{|\alpha|}_0(\Omega).$$

Definición 1.9 *Para* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, *se define el espacio de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *por* $W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D_\alpha f \quad \text{existe y está en} \quad L^p(\Omega) \text{para todo} \quad |\alpha| \leq k\}$. *Definimos*

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := (\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D_\alpha f|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} ess \sup_{x\in\Omega} |D_\alpha f(x)|.$$

Los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios normados. Más aún, veremos que los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach.

Definición 1.10 $H^{k,p}(\Omega)$ *es la clausura de* $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *y* $H_0^{k,p}(\Omega)$ *es la clausura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *con respecto a la norma de* $W^{k,p}$.

Por tanto $f \in H_0^{k,p}(\Omega)$ cuando existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Proposición 1.3 *Sea* $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$. *El espacio* $W^{k,p}(\Omega)$ *es completo con respecto a la norma* $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$, *por tanto es un espacio de Banach.*

Proposición 1.4 *Sea* $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega).$$

Enunciamos a continuación un importante teorema en espacios de Sobolev denominado *Teorema de Encaje de Sobolev.*

Teorema 1.6 ***(Teorema de Encaje de Sobolev).***
Sea M *una variedad Riemanniana compacta* $n-$*dimensional y* $f \in H^{1,p}(M)$. *Entonces para* $p < n$

$$f \in L^{\frac{np}{n-p}}(M).$$

Más aún, existe una constante $c = c(p,n)$ *tal que para toda* $f \in H^{1,p}(M)$

$$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(M)} \leq c\|Df\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{para} \quad p < n.$$

El teorema 1.6 muestra, entre otras cosas, que para $p < n$ el espacio $H^{1,p}(M)$ está encajado continuamente en el espacio $L^{\frac{np}{n-p}}(M)$, ésto es, existe una aplicación lineal inyectiva acotada

$$i : H^{1,p}(\Omega) \to L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega).$$

Recordemos que una aplicación lineal continua es compacta si la imagen de cada sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.

Recordemos también que para una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional M, existe un encaje continuo

$$j : L^r(M) \to L^q(M) \text{ para } 1 \leq q \leq r \leq \infty$$

En particular, existe un encaje continuo

$$j \circ i : H^{1,p}(M) \to L^q(M) \text{ para } 1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}.$$

El *teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov* que enunciamos a continuación establece que éste encaje es compacto para $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

Teorema 1.7 *Sea M una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional. Entonces para $p < n$, $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$ y $p \geq n$, $1 \leq q < \infty$, respectivamente, el espacio $H^{1,p}(M)$ está compactamente encajado en $L^q(M)$.*

Resulta a partir de éste teorema que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{1,2}(M)$ es acotada, ésto es,

$$\|f_n\|_{W^{1,2}(M)} \leq K,$$

entonces (f_n) contiene una subsucesión convergente en la norma de L^2 y por tanto una subsucesión que converge puntualmente casi en todas partes.

Presentamos a continuación algunos teoremas básicos del cálculo variacional usados en el trabajo. Entre ellos, el principio del máximo, el lema punto frontera de Hopf y el teorema de regularidad de Cherrier.

Definición 1.11 ***(Operadores Elípticos de Segundo Orden).***
Un operador diferencial de segundo orden L, es un operador de la siguiente forma:

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x),$$

donde $a_{ij}(x), b_i(x)$ y $c(x)$ son funciones continuas definidas en un conjunto abierto y conexo Ω de $\mathbb{R}^n$.
L es llamado uniformemente elíptico sobre Ω, si existen $\Lambda, \lambda > 0$ tal que

$$\Lambda |\xi|^2 \geq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \;\; \forall x \in \Omega, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n - 0. \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.3 *Si consideramos $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = 0$ y $c = 0$ para todo $i, j = 1, ..., n$ tenemos el operador $L = \Delta$. Observemos que este operador es uniformemente elíptico pues tomando $\lambda = 1$ se tiene la desigualdad 1.1.*

Ejemplo 1.4 $L = \Delta_g - \frac{n-2}{4(n-1)} R$, *donde*

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j (g^{ij} \sqrt{g} \partial_i) = g^{ij} \partial_j \partial_i + \textit{términos de orden inferior},$$

es uniformemente elíptico ya que la métrica g es una métrica Riemanniana definida positiva.

Teorema 1.8 ***(Principio Fuerte del Máximo (ó Mínimo)).***
Sea L un operador uniformemente elíptico, $c = 0$ y $Lu \geq 0$ $(Lu \leq 0)$ en un dominio Ω (no necesariamente acotado). Si u alcanza su valor máximo ó (mínimo) en el interior de Ω, entonces u es constante. Si $c \leq 0$ y $\frac{c}{\lambda}$ es acotado entonces u no puede alcanzar un valor máximo no negativo (ó mínimo no positivo) en el interior de Ω a menos que u sea constante.

Teorema 1.9 ***(Lema Punto Frontera de Hopf).***

Suponga que L es uniformemente elíptico, $c = 0$ y $Lu \geq 0$ en Ω. Sea $x_0 \in \partial\Omega$ tal que:

i. *u es continua en x_0.*

ii. *$u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \Omega$.*

iii. *$\partial\Omega$ satisface la condición de esfera interior en x_0, ésto es, existe una bola $B \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B$.*

Entonces la derivada normal exterior de u en x_0, si existe, satisface la desigualdad estricta

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

Si $c \leq 0$ y c/λ es acotado, se tiene la misma conclusión siempre que $u(x_0) \geq 0$, y si $u(x_0) = 0$ se tiene la misma conclusión independientemente del signo de c.

Teorema 1.10 ***(Teorema de Regularidad de Cherrier).***

Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta n-dimensional con frontera y $n \geq 3$, $H \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{M})$, $L \in C^\infty(\mathbb{R} \times \partial M)$ y $\phi \in H_1^2(M)$ funciones que satisfacen para todo $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \overline{M} \times \partial M$,

$$|H(t,x)| \leq c(1 + |t|^{v-1}) \;\; y \;\; |L(t,y)| \leq c(1 + |t|^{\tau-1}),$$

donde $v = \frac{2n}{n-2}$ y $\tau = \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Supongamos que, para toda $\phi \in H_1^2(M)$

$$\int_M (g(\nabla\psi, \nabla\phi) + H(\psi, x)\phi) dv(x) + \int_{\partial M} L(\psi, y)\phi d\sigma(y).$$

Entonces $\psi \in C^\infty(\overline{M})$ y satisface

$$\begin{cases} \Delta_g \psi + H(\psi, x) = 0 & en \;\; M, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + L(\psi, y) = 0 \;\; sobre \;\; \partial M. & \end{cases} \tag{1.2}$$

1.2. Resultados básicos de Geometría

Una variedad diferenciable M dotada de una métrica Riemanniana g se denomina variedad Riemanniana (M, g). Dos métricas Riemannianas son conformemente equivalentes si una se obtiene de la otra al multiplicar por una función positiva. A continuación definimos formalmente éste concepto.

Definición 1.12 ***(Métrica Conforme).*** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Se dice que la métrica $\tilde{g}$ es conforme a la métrica g, si $\tilde{g} = fg$, para alguna función f suave y positiva de valor real definida sobre M. Estas métricas tienen la propiedad de preservar ángulos, es decir si $x \in M$ y v, v' son vectores no nulos del plano tangente en x, (T_xM), entonces*

$$\frac{g(v,v')}{[g(v,v)]^{1/2}[g(v',v')]^{1/2}} = \frac{\tilde{g}(v,v')}{[\tilde{g}(v,v)]^{1/2}[\tilde{g}(v',v')]^{1/2}}.$$

La siguiente definición extiende el concepto de derivada, en el sentido de establecer una forma para derivar un campo vectorial con respecto a otro y de poseer características propias de la derivada como la linealidad. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales de clase $C^\infty(M)$ y por $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ el anillo de funciones de valor real de clase $C^\infty(M)$ definidos sobre M.

Definición 1.13 ***(Conexión Afín).*** *Una conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable M es una aplicación,*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

denotada por $(X, Y) \to \nabla_X Y$ que satisface las siguientes propiedades:

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$

ii. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

iii. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

En la anterior definición $X(f)$ denota la derivada de f en la dirección de X.
A continuación presentamos algunos ejemplos de conexiones afines sobre $\mathbb{R}^n$ y variedades en general.

Ejemplo 1.5 *1. Si $v \in T_x\mathbb{R}^n$ y Y es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^n$*

$$(D_vY)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{Y(x+tv) - Y(x)}{t}$$

es una conexión.

2. La conexión ∇ de una variedad Riemanniana M^n de $\mathbb{R}^{n+1}$, se define a partir de la conexión natural D de $\mathbb{R}^{n+1}$ y la métrica g inducida sobre M, considerando el campo normal unitario N sobre M, como sigue

$$\nabla_X Y = D_X Y - g(D_X Y, N)N = (D_X Y)^T.$$

3. Sean $\langle , \rangle$ el producto escalar usual sobre $\mathbb{R}^3$ y S^2 la esfera unitaria. El espacio tangente a S^2 en un punto x es naturalmente identificado con el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ conformado por todos los vectores ortogonales a x. Se sigue que, un campo vectorial Y sobre S^2 puede ser visto como una aplicación $Y : S^2 \to \mathbb{R}^3$ que satisface

$$\langle Y_x, x \rangle = 0, \forall x \in S^2.$$

Denote por dY la diferencial (matriz Jacobiana) de tal aplicación. Entonces la fórmula

$$(\nabla_Z Y)_x = dY_x(Z_x) + \langle Z_x, Y_x \rangle x$$

define una conexión afín sobre S^2.

Teorema 1.11 ***(Levi-Civita).***
Dada una variedad Riemanniana (M, g), existe una única conexión afín ∇ sobre M la cual satisface las condiciones:

i. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, *(Simétrica)*

ii. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, *(Compatible con la métrica Riemanniana)*

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, *donde* $[X, Y] = XY - YX$ *es el bracket de Lie.*

De ahora en adelante, utilizaremos la notación tensorial que permite escribir de forma más simple y compacta las expresiones que poseen sumas sin indicar explícitamente el símbolo de sumatorias. Por ejemplo:

$$a^i b_i = \sum_{i=1}^{n} a^i b_i = a^1 b_1 + \cdots + a^n b_n.$$

Definición 1.14 ***(Símbolos de Christoffel).***
En un sistema coordenado (U, φ) *las funciones* Γ^l_{pq} *definidas sobre* U *y dadas por*

$$\nabla_{\partial_p} \partial_q = \Gamma^l_{pq} \partial_l, \quad \textit{donde} \quad \partial_l = \frac{\partial \varphi}{\partial x_l},$$

son llamadas coeficientes de la conexión ∇ *sobre* U *ó símbolos de Christoffel.*

La conexión de Levi-Civita satisface que,

$$0 = [\partial_p, \partial_q] = \nabla_{\partial_p} \partial_q - \nabla_{\partial_q} \partial_p \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\partial_p} \partial_q = \nabla_{\partial_q} \partial_p \quad \Rightarrow \quad \Gamma^l_{pq} = \Gamma^l_{qp}.$$

Ahora, si $g_{pq} = g(\partial_p, \partial_q)$ se tiene

$$\partial_k g_{pq} = \partial_k g(\partial_p, \partial_q) = g(\nabla_{\partial_k} \partial_p, \partial_q) + g(\partial_p, \nabla_{\partial_k} \partial_q) = \Gamma^l_{kp} g_{ql} + \Gamma^l_{kq} g_{pl}.$$
$$\partial_p g_{qk} = \partial_p g(\partial_q, \partial_k) = g(\nabla_{\partial_p} \partial_q, \partial_k) + g(\partial_q, \nabla_{\partial_p} \partial_k) = \Gamma^l_{pq} g_{kl} + \Gamma^l_{pk} g_{ql}.$$
$$\partial_q g_{pk} = \partial_q g(\partial_p, \partial_k) = g(\nabla_{\partial_q} \partial_p, \partial_k) + g(\partial_p, \nabla_{\partial_q} \partial_k) = \Gamma^l_{qp} g_{kl} + \Gamma^l_{qk} g_{pl}.$$

Sumando las dos últimas ecuaciones y restando la primera, o btenemos una expresión clásica para los símbolos de Christoffel de la conexión Riemanniana en términos de la métrica g

$$\Gamma^l_{pq} g_{kl} = \frac{1}{2}[\partial_p g_{qk} + \partial_q g_{pk} - \partial_k g_{pq}].$$

La matriz (g_{km}) tiene una matriz inversa que denotaremos por (g^{km}). Entonces,

$$\Gamma^m_{pq} = \frac{1}{2}[\partial_p g_{qk} + \partial_q g_{pk} - \partial_k g_{pq}]g^{km}.$$

Definición 1.15 ***(Gradiente).*** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Dados un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una función $f \in \mathcal{D}(M)$, se define el gradiente de f, ∇f, como el campo vectorial sobre M que satisface*

$$g(\nabla f(p), v) = df_p(v), \quad p \in M, v \in T_pM.$$

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un sistema de coordenadas locales en M y $\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$ es el marco local inducido, entonces el gradiente de f está dado en coordenadas por:

$$gradf = \nabla f = f^p \partial_p,$$

donde $f^p = g^{pq} f_q$, pues por definición $f_q = g(\nabla f, \partial_q) = g(f^p \partial_p, \partial_q) = f^p g_{pq}$.

Utilizando la definición de gradiente y las propiedades de la derivada direccional se puede ver que si f y h son funciones diferenciables en M entonces

$$\begin{aligned} \nabla(f + g) &= \nabla f + \nabla h \\ \nabla(f \cdot g) &= h(\nabla f) + f(\nabla h). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Definición 1.16 ***(Tensor).*** *Un r-tensor T sobre una variedad Riemanniana M es una función multilineal*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{rfactores} \to C^\infty(M).$$

Definición 1.17 ***(Hessiano).*** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana con conexión Levi-Civita. Dada $f \in C^\infty(M)$ se define el Hessiano de f como el $2-$tensor que satisface:*

$$Hess(f)(X, Y) = g(\nabla_X(gradf), Y).$$

Proposición 1.5 *El Hessiano de f es la forma bilineal simétrica en T_xM, dada por*

$$Hess(f)(X,Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f,$$

donde $X, Y \in T_xM$ y ∇ es la conexión Riemanniana sobre M.

Observación 1.1 *En un sistema local de coordenadas*

$$f_{pq} \equiv Hess(f)(\partial_p, \partial_q) = \partial_p(\partial_q f) - (\nabla_{\partial_p}\partial_q)f = \partial_p(f_q) - \Gamma^k_{pq}\partial_k f = \partial_p(f_q) - \Gamma^k_{pq} f_k. \quad (1.4)$$

A continuación enunciamos un resultado que establece una forma explícita para calcular la traza de un operador lineal adjunto a partir de su forma bilineal asociada y que será de gran utilidad en la definición de *laplaciano*.

Proposición 1.6 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. Si $A : T_x \to M$ es un operador lineal autoadjunto y $B : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ es la forma bilineal asociada, esto es,*

$$B(X,Y) = g(A(X), Y).$$

Entonces la traza de A es igual a $B(X_p, X_q)g^{pq}$ con $1 \leq p, q \leq n$, donde $C = \{X_k\}$ es una base de T_xM.

Definición 1.18 ***(Laplaciano).*** *Sea (M, g) una variedad Riemanniana. El laplaciano de una función f suave sobre M, en símbolos, $\Delta_g f$, es la traza del Hessiano de f.*

Por la proposición anterior se tiene

$$\Delta_g f = f_{pq} g^{pq},$$

donde f_{pq} son los coeficientes del $Hess(f)$.
Por otra parte, de la ecuación 1.4 resulta

$$\Delta_g f = [\partial_p(f_q) - \Gamma^k_{pq} f_k] g^{pq}.$$

Con el objetivo de definir la curvatura escalar de una variedad Riemanniana, enunciamos los siguientes conceptos.

Definición 1.19 ***(Tensor de Curvatura).*** *La curvatura de la conexión de Levi-Civita es el $4-$tensor definido por:*

$$R(X,Y,Z,W) = g(-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W).$$

Denotaremos por $R(X,Y)Z$ al vector $-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$.

Definición 1.20 ***(Tensor de Ricci).*** *La primera contracción del tensor de curvatura con respecto a la métrica g es llamado el tensor de Ricci y se denota por $Ric(X,Y)$. Así,*

$$Ric(X,Y) = \sum_p R(X, X_p, Y, X_p),$$

donde $\{X_p\}$ es un conjunto de campos ortonormales.

Observación 1.2 *Debido a la simetría del tensor de curvatura resulta que el tensor de Ricci es un $2-$tensor simétrico.*

Definición 1.21 ***(Curvatura Escalar).*** *Definimos la curvatura escalar R como la contracción del tensor de Ricci con respecto a la métrica g. Así que, si localmente $\{X_p\}$ es un conjunto de campos ortonormales entonces,*

$$R = \sum_p Ric(X_p, X_p) = \sum_{p,q} R(X_p, X_q, X_p, X_q) = \sum_{p,q} g(R(X_p, X_q)X_p, X_q).$$

Definición 1.22 ***(La Segunda Forma Fundamental).*** *La segunda forma fundamental es un $2-$tensor simétrico definido para $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial M)$ por*

$$H(X,Y) = g(\nabla_X \eta, Y),$$

donde η es el campo vectorial normal hacia afuera en la frontera de M.
Para un sistema local de coordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ alrededor de $x \in \partial M$, denotaremos los coeficientes de la segunda forma fundamental así:

$$H(\partial_i, \partial_j) = h_{ij},$$

para $1 \leq i, j \leq n-1$.
La curvatura media en $x \in \partial M$ *está definida por*

$$h(x) = \frac{g^{ij} h_{ij}}{n-1}(x).$$

A continuación introducimos el concepto de sistema de coordenadas normales en un punto p de una variedad Riemanniana dotada de una conexión afín simétrica. Este sistema local de coordenadas simplifica considerablemente los cálculos ya que los símbolos de Christoffel de anulan en el punto.

Definición 1.23 ***(Coordenadas Normales).*** *Dado un punto* $x \in M$ *y un vector* $v \in T_xM$*, existe una única geodésica* γ_v *a través de* x *cuyo vector tangente es* v*. Si* $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *es una geodésica parametrizada por* t*, la curva* $c : (-\varepsilon/s, \varepsilon/s) \to M$ *definida por* $c(t) = \gamma_v(st)$*, es también una geodésica. Más aún, como* $c'(0) = sv$ *entonces* $c = \gamma_{sv}$*.*

La aplicación exponencial, $\exp_x : T_xM \to M$ está definida por $\exp_x(v) = \gamma_v(1), \forall v \in T_xM$ tal que 1 pertenece al dominio de γ_v. Dado que $\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st)$, se deduce que para cualquier v existe un número $s > 0$ tal que $\gamma_{sv}(1)$ esté definido, así se puede demostrar que $\exp_x(\cdot)$ está definida sobre una vecindad del origen en T_xM. Si escogemos una base ortonormal $\{v_p\}$ de T_xM, podemos definir una función ϕ que asigne a $(x_1, ..., x_n)$ el punto $\exp_x(\sum_p x_p v_p)$. Estas coordenadas son también llamadas *coordenadas geodésicas* ó *normales*.
La utilidad que tiene usar un sistema normal de coordenadas se resume en la siguiente proposición.

Proposición 1.7 *En un sistema normal de coordenadas en* $x \in M$*, las componentes del tensor métrico en* x *satisface:*

$$g_{pq}(x) = \delta_{pq}(x) \quad y \quad \partial_k g_{pq}(x) = 0 \quad \forall p, q, k = 1, ..., n \quad (\textit{equivalente a} \quad \Gamma^k_{pq}(x) = 0).$$

Como estamos interesados en estudiar el problema de deformación conforme de métricas en variedades con frontera, es necesario definir un sistema local de coordenadas para la frontera de M, ∂M, el cual simplifique algunos cálculos.

Definición 1.24 ***(Coordenadas Fermi).*** *Sea M una variedad Riemanniana con frontera ∂M de dimensión $n \geq 3$, $P \in \partial M$ y $(x_1, ..., x_{n-1})$ las coordenadas normales alrededor de P. Sea $\gamma(x_3)$ la geodésica que parte de $(x_1, ..., x_{n-1})$ en la dirección ortogonal a ∂M y está parametrizada por longitud de arco. Las coordenadas (x_1, x_2, x_3) son llamadas Coordenadas Fermi.*

Las coordenadas Fermi en P satisfacen $g_{tt} = 1$ y $g_{ti} = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-1$.

Capítulo 2

Laplaciano Conforme y Cocientes de Sobolev

Un problema fundamental de la geometría Riemanniana es la deformación conforme de métricas en variedades Riemannianas a una métrica con curvatura escalar prescrita k en el caso de variedades sin frontera, o a una métrica con curvatura escalar prescrita k sobre M y curvatura media prescrita h sobre ∂M, en el caso de variedades con frontera. Una métrica $\widetilde{g}$ es conforme a la métrica g si $\widetilde{g} = \phi g$ donde ϕ es una función positiva definida en la variedad M.

El problema matemático resulta equivalente a la existencia de soluciones positivas de una ecuación semilineal elíptica en el caso de variedades sin frontera, o a la existencia de soluciones positivas de un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales semilineales, la primera elíptica en el interior de la variedad y la segunda del tipo condición de Newmann en la frontera de la misma en el caso de variedades con frontera.

Dada (M^n, g) una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional con frontera y $n \geq 3$, sea $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ una métrica conforme a la métrica g. La relación entre la curvatura escalar de la métrica g, $R(g)$, y la curvatura escalar de la métrica $\tilde{g}$ está dada por

$$R(\tilde{g}) = -\frac{4(n-1)}{n-2}\frac{\mathrm{L}u}{u^{(n+2)/(n-2)}}, \qquad \mathrm{L} = \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)}R(g), \tag{2.1}$$

donde Δ es el operador Laplaciano calculado con respecto a la métrica g. La relación entre la curvatura media de la frontera de M, ∂M, con respecto a la métrica g, $h(g)$, y la curvatura media de ∂M, con respecto a la métrica $\tilde{g}$, $h(\tilde{g})$, está dada por la ecuación

$$h(\tilde{g}) = \frac{2}{n-2}\frac{\mathrm{B}u}{u^{n/(n-2)}}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h(g) \tag{2.2}$$

donde $\partial\eta$ es la derivada normal exterior calculada con respecto a la métrica g.
El operador L definido en M se denomina *operador laplaciano conforme* y B es el *operador de frontera* sobre ∂M. Denotamos por (L, B) al operador L con respecto a la condición de frontera B.

Sea M una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional con frontera ∂M compuesta por dos componentes conexas $(\partial M)_1$ y $(\partial M)_2$, $n \geq 3$. Nuestro propósito es encontrar una métrica $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ con curvatura escalar $\tilde{R}$ plana y curvaturas medias constantes $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, con $\tilde{h}_1 \neq \tilde{h}_2$ sobre $(\partial M)_1$ y $(\partial M)_2$ respectivamente. Denotemos por $\mathcal{M}$ el espacio de todas las métricas Riemannianas suaves sobre M. Para $g \in \mathcal{M}$, denotamos por $R(g)$ la curvatura escalar de g y por $h_i(g)$ la curvatura media de $(\partial M)_i, i = 1, 2$ con respecto a la métrica g.
Recordemos que en dimensión dos el célebre teorema de Gauss-Bonnet establece que en una variedad Riemanniana compacta orientable con frontera la curvatura de Gauss total más la curvatura geodésica total de la frontera es igual a $2\pi\chi(M)$:

$$2\pi\chi(M) = \int_M K dv + \int_{\partial M} k_g d\sigma.$$

Para $n \geq 3$ se define el *funcional de curvatura escalar total + curvatura media total* por

$$F(g) = \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R(g) dv(g) + \frac{n-2}{2} \int_{(\partial M)_1} h_1(g) d\sigma(g) + \frac{n-2}{2} \int_{(\partial M)_2} h_2(g) d\sigma(g), \tag{2.3}$$

donde dv y $d\sigma$ representan la medida Riemanniana sobre M y ∂M inducida por la métrica g.

Sea $g \in \mathcal{M}$ una métrica fija y sea E la restricción de F a la clase conforme de g. Es posible demostrar que el mínimo de dicha funcional sujeta a determinada restricción es un múltiplo de la solución del problema 2.
Sea $\overline{g}$ en la clase conforme de la métrica g, entonces $\overline{g}$ puede escribirse como $\overline{g} = u^{4/(n-2)} g$,

donde u es una función positiva suave definida sobre M. Es posible reescribir el funcional F cuando se restringe a la clase conforme de g. Con el fin de hacer ésto, observe que las medidas Riemannianas sobre M y ∂M inducidas por la métrica $\overline{g}$, $dv_{\overline{g}}$, y $d\sigma_{\overline{g}}$, respectivamente, satisfacen que $dv_{\overline{g}} = u^{2n/(n-2)} dv$ y $d\sigma_{\overline{g}} = u^{2(n-1)/(n-2)} d\sigma$.

Usando las ecuaciones 2.1 y 2.2 y utilizando integración por partes encontramos que

$$F(\overline{g}) = F(u^{4/(n-2)} g) = E(u),$$

donde

$$E(u) = \int_M |\nabla u|^2 dv + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R u^2 dv + \frac{n-2}{2} \int_{(\partial M)_1} h_1 u^2 d\sigma + \frac{n-2}{2} \int_{(\partial M)_2} h_2 u^2 d\sigma. \tag{2.4}$$

Sean $a \geq 0$ y b, d números reales. Definamos el conjunto $C^{p,q}_{a,b,d}$ por

$$\left\{ u \in C^\infty(\overline{M}), u > 0, a \int_M u^p dv + b \int_{(\partial M)_1} u^q d\sigma + d \int_{(\partial M)_2} u^q d\sigma = 1 \right\},$$

donde $2 \leq p \leq 2n/(n-2)$ y $2 \leq q \leq 2(n-1)/(n-2)$.

Observe que la energía está definida para toda función $u \in C^1(\overline{M})$ y que $E(u) = E(|u|)$. Por ésta razón, redefinimos el conjunto $C^{p,q}_{a,b,d}$ por

$$\left\{ u \in C^1(\overline{M}), a \int_M |u|^p dv + b \int_{(\partial M)_1} |u|^q d\sigma + d \int_{(\partial M)_2} |u|^q d\sigma = 1 \right\}.$$

En $C^{p,q}_{a,b,d}$ se define $G^{p,q}_{a,b,d}(M)$ como el cociente

$$G^{p,q}_{a,b,d}(M) = \inf_{\substack{\phi \in C^1(\overline{M}) \\ \phi \neq 0}} \frac{E(\phi)}{a \int_M |u|^p dv + b \int_{(\partial M)_1} |u|^q d\sigma + d \int_{(\partial M)_2} |u|^q d\sigma} = \inf\{E(\phi) : \phi \in C^{p,q}_{a,b,d}\}.$$

Observe que, para $p = 2n/(n-2)$, $Q(M, g) = G_{1,0,0}(M)$ y para $q = 2(n-1)/(n-2)$, $Q(M, \partial M) = G_{0,1,1}(M)$.

Con el fin de ver que el conjunto $C^{p,q}_{a,b,d}$ es no vacío demostramos el siguiente lema:

Lema 2.1 *Sea $F_B : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$F_B(\lambda) = A\lambda^p + B\lambda^q,$$

donde $p > q > 1$ y $A > 0$ ó $A = 0$ y $B > 0$. Entonces la ecuación $F_B(\lambda) = 1$ tiene una única solución positiva.

Demostración. La función F_B satisface que $F_B(0) = 0$ y $\lim_{\lambda \to \infty} F_B(\lambda) = \infty$. En virtud de que F_B es continua, el Teorema del Valor Intermedio garantiza la existencia de un $\lambda_0 > 0$ tal que $F_B(\lambda_0) = 1$. Si $A = 0$ la proposición es clara. Si $A > 0$, para demostrar la unicidad estudiemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F_B en dos casos:

Caso i. $B \geq 0$. Entonces

$$F_B'(\lambda) = pA\lambda^{p-1} + qB\lambda^{q-1} \geq 0$$

y $F_B'(\lambda) = 0$ sólo si $\lambda = 0$. Por lo tanto, el valor de $\lambda_0 \in [0, \infty)$ para el cual $F_B(\lambda_0) = 1$ es único.

Caso ii. $B < 0$. Entonces

$$F_B'(\lambda) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lambda = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda = \left(\frac{-qB}{pA}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Por otro lado, note que

$$F_B\left(\left(\frac{-qB}{pA}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right) = A\left(\frac{-qB}{pA}\right)^{\frac{p}{p-q}} + B\left(\frac{-qB}{pA}\right)^{\frac{q}{p-q}} < 0$$

en donde se tuvo en cuenta que $p > q > 1$ y $\frac{-B}{A} > 0$.

Adicionalmente se tiene,

$$F_B(\lambda) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lambda = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda = \left(\frac{-B}{A}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Como $\left(\frac{-qB}{pA}\right)^{\frac{1}{p-q}} < \left(\frac{-B}{A}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ se concluye del análisis análisis anterior que:

$$\begin{cases} F_B \searrow & \text{en} \quad \left[0, \frac{-qB}{pA}\right) \\ F_B \nearrow & \text{en} \quad \left[\frac{-qB}{pA}, \infty\right) \end{cases}$$

Por tanto existe un único $\lambda_0 > 0$ tal que $F_B(\lambda_0) = 1$ tal y como se quería demostrar.

Observación 2.1 *Para toda $u \in C^1(\overline{M})$, por el lema anterior existe un único número positivo λ tal que $\lambda u \in C^{p,q}_{a,b,d}$ siempre que $p > q$.*

En efecto, $\lambda u \in C^{p,q}_{a,b,d}$ sí y sólo sí:

$$\begin{aligned} & a\int_M |\lambda u|^p + b\int_{(\partial M)_1} |\lambda u|^q + d\int_{(\partial M)_2} |\lambda u|^q = 1; \\ & a\lambda^p\int_M |u|^p + b\lambda^q\int_{(\partial M)_1} |u|^q + d\lambda^q\int_{(\partial M)_2} |u|^q = 1; \\ & F_B(\lambda) = A\lambda^p + B\lambda^q = 1; \end{aligned}$$

donde $A = a\int_M |u|^p$ y $B = b\int_{(\partial M)_1} |u|^q + d\int_{(\partial M)_2} |u|^q$.

Observación 2.2 *Note que si en la observación anterior $a = 0$ y b, d son números reales positivos, entonces existe un único número real positivo λ tal que $\lambda u \in C^q_{0,b,d}$.*

En lo que resta de ésta sección tomaremos $q = 2(n-1)/(n-2)$ y denotaremos por $C^q_{0,b}$ a $C^q_{0,b,b}$. De igual forma escribiremos $G^q_{0,b}(M)$ en vez de $G^q_{0,b,b}(M)$. Así,

$$G^q_{0,b}(M) = \inf_{\phi \in C^1(\overline{M})} \frac{E(\phi)}{\left(b \int_{(\partial M)} |u|^q d\sigma\right)^{2/q}} = \inf_{\phi \in C^q_{0,b}} E(\phi).$$

y

$$C^q_{0,b}(M) = \{\phi \in C^1(\overline{M}) : b \int_{(\partial M)} |\phi|^q d\sigma = 1\}.$$

Sea $\mathbb{R}^n_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, t \geq 0\}$ el semiplano superior n-dimensional del espacio Euclideano. Cuando $M = \mathbb{R}^n_+$ está dotada con la métrica Euclideana, la curvatura escalar es cero, y $\partial\mathbb{R}^n_+$ tiene curvatura media cero. Por tanto el cociente de Sobolev $G^q_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$ toma la forma

$$G^q_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) = \inf_{\varphi \in C_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla\varphi|^2 dx dt\right),$$

donde

$$C_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) = \left\{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) : b\left(\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \phi^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma\right) = 1\right\}.$$

A continuación demostraremos que $G_{0,b}(M)$ está acotado superiormente por el cociente de Sobolev $G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$

Proposición 2.1 *Sean $b > 0$ y (M, g) una variedad Riemanniana con frontera. Entonces*

$$G^q_{0,b}(M) \leq G^q_{0,b}(\mathbb{R}^n_+).$$

Lema 2.2 *Dados $\varepsilon > 0$ y $b > 0$, sea $u(x,t) = \alpha\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$. Si $\alpha = b^{-\frac{(n-2)}{2(n-1)}}$, entonces $\alpha u \in C^q_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$, ésto es,*

$$b\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} = 1.$$

Demostración. En [10] J. Escobar demuestra que la función

$$\phi = \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon + t)^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}, \varepsilon > 0$$

resuelve el problema

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0, & \text{en} \quad \mathbb{R}^n_+. \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (n-2)\phi^{n/(n-2)} = 0, & \text{en} \quad \partial \mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

Así, la función $u(x,t) = \alpha \phi(x,t)$ es solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha^{-2/(n-2)}(n-2)u^{n/(n-2)} = 0, & \text{sobre} \quad \partial \mathbb{R}^n_+ \end{cases} \tag{2.5}$$

Un cálculo directo demuestra que $\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \phi^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} = 1$.
Por tanto, si $u = \alpha\phi$:

$$\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \left(\frac{u}{\alpha} \right)^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} = 1 \quad \text{implica} \quad \alpha^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} = 1$$

Si tomamos $b = \alpha^{-\frac{2(n-1)}{n-2}}$ tenemos $u \in C_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$ tal y como se deseaba demostrar.

***Demostración Proposición* 2.1**

Dado $\varepsilon > 0$, exhibiremos una función $\varphi \in C_{0,b}(M,g)$ tal que $E(\varphi) < G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + \varepsilon$. Para $\varepsilon > 0$, la función u definida en el lema 2.2 es bajo traslaciones en la variable x, la única solución positiva del problema 2.5 en $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, (ver [10]).
Multiplicando la ecuación 2.5 por u e integrando por partes obtenemos:

$$\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{\partial u}{\partial \eta} u - \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 = 0. \tag{2.6}$$

En $\partial \mathbb{R}^n_+$ se tiene que $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$, donde $\eta = -e_n = (0, 0, \cdots, -1)$ es el vector normal unitario exterior. Por tanto, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial u}{\partial t}$, y al reemplazar en 2.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} u\frac{\partial u}{\partial \eta} - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 = 0;\\
&\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} u\left(-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 = 0;\\
&(n-2)\alpha^{\frac{-2}{(n-2)}} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} u^{\frac{n}{(n-2)}} u - \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 = 0;\\
&(n-2)\alpha^{\frac{-2}{(n-2)}} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} u^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} - \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 = 0
\end{aligned}$$

Así que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 = (n-2)\alpha^{\frac{-2}{(n-2)}} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} u^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} \tag{2.7}$$

Usando la invarianza conforme de la métrica (ver Proposición 1,1 en [10]), cambiamos la métrica g dentro de su clase conforme a una métrica que posea buenas propiedades en una pequeña vecindad de un punto frontera. Para ello, sea φ_1 la primera función propia del problema:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 - \frac{n-2}{4(n-1)}R(g)\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0, & \text{en} \quad M \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h(g)\varphi_1 = 0, & \text{sobre} \quad \partial M \end{cases} \tag{2.8}$$

Es bien conocido que $\varphi_1 > 0$ sobre $\overline{M}$, (ver [6]). La ley de transformación 2.2 para la métrica conforme $g_1 = \varphi_1^{4/(n-2)}g$ implica que la curvatura media de ∂M con respecto a la métrica g_1 es cero. en efecto,

$$h(g_1) = \frac{2}{n-2}\frac{1}{\varphi_1^{n/(n-2)}}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2}h(g)\varphi_1\right) = 0$$

Es posible cambiar aún más la métrica de manera tal que la curvatura sea nula en una pequeña vecindad de un punto frontera. En efecto, sea $v > 0$ una solución del problema lineal $Lv = 0$ sobre U (donde U es una pequeña vecindad de un punto frontera) que satisface la condición $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ sobre $\partial U \cap \partial M$.

Con la métrica $\tilde{g} = v^{4/(n-2)} g_1 = (v\varphi_1)^{4/(n-2)} g$ se tiene:

$$R(\tilde{g}) = \frac{-4(n-1)}{n-2} \frac{1}{v^{(n+2)/(n-2)}} \left(\Delta v - \frac{n-2}{4(n-1)} R(g_1) v \right) = \frac{-4(n-1)}{n-2} Lv = 0 \quad \text{en} \quad U.$$

y

$$h(\tilde{g}) = \frac{2}{n-2} \frac{1}{v^{n/(n-2)}} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} h(g_1) v \right) = \frac{2}{n-2} \frac{1}{v^{n/(n-2)}} \frac{\partial v}{\partial \eta} + h(g_1) \frac{1}{v^{2/(n-2)}} = 0$$

ya que $h(g_1) = 0$ sobre ∂M y $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ en $\partial U \cap \partial M$.

Extendemos v a $\overline{M}$ de tal forma que $v > 0$. Sea 0 un punto en ∂M. Sean $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ las coordenadas normales sobre ∂M en el punto 0.
Sea $\gamma(t)$ la geodésica que sale de $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ en la dirección ortogonal a ∂M y está parametrizada por longitud de arco. Entonces $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)$ definen las llamadas coordenadas Fermi alrededor de $0 \in \partial M$.

Sea ρ_0 un número positivo pequeño. Considere la semibola y el semianillo:

$$\begin{aligned} B^+_{\rho_0} &= B^+_{\rho_0}(0) = \{(x,t) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + t^2 > \rho_0^2, t > 0\} \\ A^+_{\rho_0} &= B^+_{2\rho_0} - B^+_{\rho_0} \end{aligned}$$

Considere además una función $\psi(s)$ decreciente y suave a trozos con variable $|s|$ que satisface $\psi(s) = 1$ para $|s| \leq \rho_0$, $\psi(s) = 0$ para $|s| \geq 2\rho_0$ y $|\psi'(s)| \leq \rho_0^{-1}$ para $\rho_0 \leq |s| \leq 2\rho_0$.
Sea φ la función test definida sobre M como $\varphi(x,t) = u(x,t)\psi(s)$, donde $s^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + t^2$.
Calculamos $E(\varphi)$ como una suma de la energía sobre $B^+_{\rho_0}$ y $A^+_{\rho_0}$. En coordenadas Fermi, la métrica es Euclideana hasta el primer orden, por lo tanto:

$$\int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla \varphi|_g^2 dv_g \leq \int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla \varphi|^2 dx dt + c \int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)| |\nabla \varphi|^2 dx dt \tag{2.9}$$

donde $|\nabla\varphi|^2 = \varphi_1^2 + \cdots + \varphi_n^2$, $\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$ y $\varphi_n = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$.
Sobre $B^+_{\rho_0}$, $\varphi = u$. Por tanto, al multiplicar la ecuación 2.5 por u e integrar por partes obtenemos:

$$\int_{B^+_{\rho_0}} u\Delta u = 0$$

Así,

$$\int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2 = \int_{\partial B^+_{\rho_0}} u\frac{\partial u}{\partial\eta}$$

Aquí las cantidades son tomadas con respecto a la métrica Euclideana.
Sabiendo que

$$\nabla u(x,t) = -(n-2)\alpha\frac{\varepsilon^{(n-2)/2}}{((\varepsilon+t)^2 + |x-x_0|^2)^{n/2}}(x-x_0, \varepsilon+t),$$

si $|x_0| < \rho_0$ entonces $\frac{\partial u}{\partial\eta} = \nabla u \cdot \eta \leq 0$. En efecto, como $\eta = (x,t)$ en $\partial B^+_{\rho_0} \cap M$, entonces

$$(x-x_0, \varepsilon+t)\cdot(x,t) = \varepsilon t + t^2 + \|x\|^2 - x_0\cdot x = \varepsilon t + \rho_0^2 - x_0\cdot x \geq 0 \tag{2.10}$$

sí y sólo sí $x_0 \cdot x < \varepsilon t + \rho_0^2$. Como $|x_0\cdot x| \leq |x_0||x| < \rho_0|x_0| < \rho_0^2 < \varepsilon t + \rho_0^2$, se obtiene la desigualdad 2.10. Consecuentemente $\frac{\partial u}{\partial\eta} \leq 0$.

Teniendo en cuenta que, $\partial B^+_{\rho_0} = (\partial B^+_{\rho_0} \cap M) \cup (\partial B^+_{\rho_0} \cap \partial M)$ se tiene

$$\int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2 = \int_{\partial B^+_{\rho_0}\cap M} u\frac{\partial u}{\partial\eta} + \int_{\partial B^+_{\rho_0}\cap\partial M} u\frac{\partial u}{\partial\eta} \leq \int_{\partial B^+_{\rho_0}\cap\partial M} u\frac{\partial u}{\partial\eta} \tag{2.11}$$

De la ecuación 2.5 sabemos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial B^+_{\rho_0}\cap\partial M} u\frac{\partial u}{\partial\eta} = -\int_{\partial B^+_{\rho_0}\cap\partial M} u\frac{\partial u}{\partial t} &= (n-2)\alpha^{-2/(n-2)}\int_{\partial B^+_{\rho_0}\cap\partial M} u^{2(n-1)/(n-2)} \\ &= (n-2)\alpha^{-2/(n-2)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u^{2(n-1)/(n-2)} + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n})\end{aligned}$$

donde se usó que

$$\int_{\partial B^+_{\rho_0}\cap\partial M} u^{2(n-1)/(n-2)}dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u^{2(n-1)/(n-2)}d\sigma + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) \tag{2.12}$$

Reemplazando 2.7 y 2.12 en la desigualdad 2.11 tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2 dxdt &\leq (n-2)\alpha^{-2/(n-2)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u^{2(n-1)/(n-2)} + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 dxdt + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) \\
&\leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n})
\end{aligned}$$

Al reemplazar la última desigualdad en 2.9 se obtiene:

$$\int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2_g dv \leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + E_n, \tag{2.13}$$

donde:

$$E_n = \begin{cases} c\varepsilon + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}), & \text{para} \quad n \geq 4 \\ c\varepsilon \left| log\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)\right| + c\varepsilon^2\rho_0^{-2}, & \text{cuando} \quad n = 3 \end{cases} \tag{2.14}$$

En efecto, de 2.9 se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2_g dv_g &\leq \int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2 dxdt + c\int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)||\nabla u|^2 dxdt \\
&\leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) + c\int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)||\nabla u|^2 dxdt
\end{aligned}$$

Ahora, estudiamos la integral

$$\int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)||\nabla u|^2 dxdt$$

$$
\begin{aligned}
\int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)||\nabla u|^2 dxdt &\leq (n-2)\alpha \int_{B^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^{n-2}|(x,t)|(|x-x_0|^2+(\varepsilon+t)^2)}{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)^n} dxdt \\
&\leq c \int_{B^+_{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)}} \frac{\varepsilon^{n-2}|(y\varepsilon, s\varepsilon)|(|y\varepsilon-y_0\varepsilon|^2+(\varepsilon+s\varepsilon)^2)}{((\varepsilon+s\varepsilon)^2+|y\varepsilon-y_0\varepsilon|^2)^n} \varepsilon^n dyds \\
&= c \int_{B^+_{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)}} \frac{\varepsilon^{n-2}(\varepsilon^2 y^2+\varepsilon^2 s^2)^{1/2}(\varepsilon^2|y-y_0|^2+\varepsilon^2(1+s)^2)\varepsilon^n}{(\varepsilon^2(1+s)^2+\varepsilon^2|y-y_0|^2)^n} \varepsilon^n dyds \\
&= c\varepsilon \int_{B^+_{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)}} \frac{|(y,s)|(|y-y_0|^2+(1+s)^2)}{((1+s)^2+|y-y_0|^2)^n} dyds \\
&\leq c\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(y,s)|^3}{|(y,s)|^{2n}} dyds \\
&\leq c\varepsilon + c\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |(y,s)|^{3-2n} dyds = c\varepsilon + c\varepsilon \int_1^{+\infty} r^{3-2n} r^{n-1} dr \\
&= c\varepsilon
\end{aligned}
$$

Al reemplazar en 2.13 se obtiene que para $n \geq 4$:

$$
\begin{aligned}
\int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2_g dv_g &\leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) + c\int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)||\nabla u|^2 dxdt \\
&\leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) + c\varepsilon \\
&\leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + E_n,
\end{aligned}
$$

donde $E_n = O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) + c\varepsilon$.

Para el caso $n = 3$, un cálculo análogo al anterior nos conduce a

$$
\begin{aligned}
\int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)||\nabla u|^2 dxdt &\leq c\varepsilon \int_{B^+_{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)}} \frac{|(y,s)|(|y-y_0|^2+(1+s)^2)}{((1+s)^2+|y-y_0|^2)^n} dyds \\
&= c\varepsilon + c\varepsilon \int_1^{\rho_0/\varepsilon} r^{-1} dr \\
&= c\varepsilon \log\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}
$$

Para calcular la energía de φ sobre $A^+_{\rho_0} = B^+_{2\rho_0} - B^+_{\rho_0}$ observe que:

$$\begin{aligned}|\nabla\varphi|^2_g &\leq |\nabla\varphi|^2 + c|(x,t)||\nabla\varphi|^2 \leq |\nabla\varphi|^2 + c(2\rho_0)|\nabla\varphi|^2\\ &= (1+2c\rho_0)|\nabla\varphi|^2 \leq c|\nabla\varphi|^2\end{aligned}$$

y a su vez, $c|\nabla\varphi|^2 \leq c|\nabla(u\psi)|^2 \leq c(|\nabla u|^2\psi^2 + |\nabla\psi|^2u^2)$. De donde resulta:

$$|\nabla\varphi|^2_g \leq c|\nabla\varphi|^2 \leq c(|\nabla u|^2\psi^2 + |\nabla\psi|^2u^2).$$

Dado que ψ satisface $0 \leq \psi \leq 1$ y $|\nabla\psi| \leq \rho_0^{-1}$ se deduce,

$$\begin{aligned}&\int_{A^+_{\rho_0}} |\nabla\varphi|^2_g dv_g \leq c\int_{A^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2 dxdt + c\rho_0^{-2}\int_{A^+_{\rho_0}} u^2 dxdt \\ &\leq c\int_{A^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^{n-2}(|x-x_0|^2+(\varepsilon+t)^2)}{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)^n}dxdt + c\rho_0^{-2}\int_{A^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^{n-2}}{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)^{n-2}}dxdt\end{aligned} \tag{2.15}$$

Con el fin de acotar la expresión $(\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2$, realizamos el siguiente cálculo en el cual usamos las desigualdades de Cauchy Schwarz y de Cauchy con δ.

$$\begin{aligned}&(\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2 \geq t^2+|x-x_0|^2 = t^2+|x|^2-2x\cdot x_0+|x_0|^2\\ &\geq t^2+|x|^2-2|x||x_0|+|x_0|^2 \geq t^2+|x|^2-4\delta|x|^2-\frac{|x_0|^2}{4\delta}+|x_0|^2\\ &= t^2+(1-\delta)|x|^2+(1-\frac{1}{\delta})|x_0|^2 = t^2+\frac{1}{2}|x|^2-|x_0|^2 \geq \frac{t^2+|x|^2}{2}-|x_0|^2\end{aligned}$$

Considerando $|x_0|^2 < \frac{\rho_0^2}{4}$ tenemos $(\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2 \geq \frac{(|x|^2+t^2)}{2} - \frac{\rho_0^2}{4}$.

Usando ésta desigualdad en 2.15 se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\int_{A^+_{\rho_0}} |\nabla\varphi|^2_g dv_g \leq c\int_{A^+_{\rho_0}} |\nabla u|^2 dxdt + c\rho_0^{-2}\int_{A^+_{\rho_0}} u^2 dxdt\\
&\leq c\int_{A^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^{n-2}(|x-x_0|^2+(\varepsilon+t)^2)}{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)^n}dxdt + c\rho_0^{-2}\int_{A^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^{n-2}}{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)^{n-2}}dxdt\\
&\leq c\varepsilon^{n-2}\int_{A^+_{\rho_0}} \frac{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)}{\left(\frac{|x|^2+t^2}{2}-\frac{\rho_0^2}{4}\right)^n}dxdt + c\rho_0^{-2}\int_{A^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\left(\frac{|x|^2+t^2}{2}-\frac{\rho_0^2}{4}\right)^{n-2}}dxdt\\
&\leq c\varepsilon^{n-2}\int A^+_{\rho_0}\frac{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)}{\left(\frac{\rho_0^2}{4}\right)^n}dxdt + c\rho_0^{-2}\int_{A^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\left(\frac{\rho_0^2}{4}\right)^{n-2}}dxdt\\
&= c\varepsilon^{n-2}\rho_0^{-2n}\int_{A^+_{\rho_0}} ((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)dxdt + c\rho_0^{2-2n}\varepsilon^{n-2}\int_{\rho_0}^{2\rho_0} r^{n-1}dr\\
&\leq c\varepsilon^{n-2}\rho_0^{-2n}(2\rho_0)^2\int_{\rho_0}^{2\rho_0} r^{n-1}dr + c\rho_0^{2-2n}\rho_0^n\varepsilon^{n-2} \leq c\varepsilon^{n-2}\rho_0^{2-n} + c\rho_0^{2-n}\varepsilon^{n-2}\\
&= c\varepsilon^{n-2}\rho_0^{2-n}.
\end{aligned}
$$

Como la métrica en coordenadas Fermi es Euclideana hasta primer orden, entonces

$$
\begin{aligned}
&\int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dv_g = \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + c\int_{B^+_{\rho_0}} |(x,t)|u^{2n/(n-2)}dxdt\\
&= \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + c\rho_0\alpha^{2n/(n-2)}\int_{B^+_{\rho_0}} \frac{\varepsilon^n}{((\varepsilon+t)^2+|x-x_0|^2)^n}dxdt\\
&= \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + c\rho_0\int_{B^+_{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)}} \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^{2n}((1+s)^2+|y-y_0|^2)^n}\varepsilon^n dyds\\
&= \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + c\rho_0\int_{B^+_{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)}} \frac{dyds}{\|(y-y_0,1+s)\|^{2n}}\\
&= \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + c\rho_0\int_0^{\rho_0/\varepsilon} r^{-n-1}dr = \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + c\rho_0\frac{\varepsilon^n}{\rho_0^n}\\
&= \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + c\rho_0^{1-n}\varepsilon^n = \int_{B^+_{\rho_0}} u^{2n/(n-2)}dxdt + O(\rho_0^{1-n}\varepsilon^n).
\end{aligned}
$$

Combinando la última desigualdad con el estimativo 2.13 resulta:

$$\begin{aligned}\int_{B^+_{2\rho_0}} |\nabla\varphi|^2 dv_g &= \int_{B^+_{\rho_0}} |\nabla\varphi|^2 dv_g + \int_{A^+_{\rho_0}} |\nabla\varphi|^2 dv_g \\ &\leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + E_n + c\varepsilon^{n-2}\rho_0^{2-n}\end{aligned}$$

donde E_n está dado por 2.14. Con la métrica $\tilde{g} = v^{4/(n-2)}g_1$, la curvatura escalar $\tilde{R} = R(\tilde{g})$ y la curvatura media $\tilde{h} = h(\tilde{g})$ se anulan sobre $B^+_{2\rho_0}(0)$ y $B^+_{2\rho_0}(0) \cap \partial M$, respectivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}E(\varphi) &= \int_M |\nabla\varphi|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M R\varphi^2 + \frac{n-2}{2}\int_{(\partial M)_1} h_1\varphi^2 + \frac{n-2}{2}\int_{(\partial M)_2} h_2\varphi^2 \\ &= \int_M |\nabla\varphi|^2 = \int_{B^+_{2\rho_0}} |\nabla\varphi|^2 dv_g \\ &\leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + E_n + c\varepsilon^{n-2}\rho_0^{2-n}.\end{aligned}$$

La función φ no está en el conjunto de restricción $C_{0,b}$. Sin embargo, el lema 2.1 garantiza la existencia de un número real $\lambda > 0$ tal que $\lambda\varphi \in C_{0,b}$.
Con el fin de estimar λ realizamos el siguiente análisis:

$$b\int_{(\partial M)} \varphi^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_g = b\int_{(\partial M)\cap B^+_{\rho_0}} \varphi^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_g + b\int_{(\partial M)\cap A^+_{\rho_0}} (u\psi)^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_g$$

Las coordenadas $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ son coordenadas normales. Por tanto, la métrica es Euclideana hasta el segundo orden. Así que

$$\begin{aligned}\int_{(\partial M)\cap B^+_{\rho_0}} u^{2(n-1)/(n-2)} d\sigma_g &= \int_{(\partial M)\cap B^+_{\rho_0}} u^{2(n-1)/(n-2)} dx + O(\varepsilon) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u^{2(n-1)/(n-2)} dx + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

donde hemos usado el siguiente hecho:

$$\int_{(\partial M)\cap B^+_{\rho_0}} \frac{|(x,t)|\varepsilon^{n-1}}{((\varepsilon+t)^2 + |x-x_0|^2)^{n-1}} d\sigma_g = \int_{B^+_{\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right)}} \frac{|(x,t)|\varepsilon}{((\varepsilon+s)^2 + |y-y_0|^2)^{n-1}} dyds \leq c\varepsilon.$$

El mismo argumento usado antes demuestra que:

$$\int_{A^+_{\rho_0}\cap(\partial M)} (u\psi)^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} \leq c\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}, \quad \text{donde} \quad c = \frac{\alpha^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}}}{1-n}.$$

Estamos interesados en demostrar que $G_{0,b}(M) \leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$. Para ello, tomamos $\varphi = u\psi$ y usamos el lema 2.2 para demostrar

$$\begin{aligned}
& b\int_{(\partial M)} \varphi^{2(n-1)/(n-2)} d\sigma_g = b\int_{(\partial M)\cap B^+_{\rho_0}} \varphi^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_g + b\int_{(\partial M)\cap A^+_{\rho_0}} (u\psi)^{\frac{2(n-1)}{(n-2)}} d\sigma_g \\
& = b\int_{\mathbb{R}^{n-1}_+} u^{2(n-1)/(n-2)} + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}) \\
& = 1 + O(\varepsilon) + 2O(\varepsilon^{n-1}\rho_0^{1-n}).
\end{aligned}$$

Los argumentos en la prueba del Lema 2.1 implican que $\lambda = 1 + \delta(\varepsilon)$ donde $\delta(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. De aquí que:

$$\begin{aligned}
E(\lambda\varphi) &= \lambda^2 E(\varphi) \\
&\leq (1+\delta)^2 (G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + E_n + c\varepsilon^{n-2}\rho_0^{2-n})
\end{aligned}$$

fijando ρ_0 y tomando ε suficientemente pequeño, finalmente obtenemos

$$G_{0,b}(M) \leq E(\lambda\varphi) \leq \lambda^2 E(\varphi) \leq G_{0,b}(\mathbb{R}^n_+) + c\varepsilon$$

Como ε fue tomado arbitrariamente, ésto demuestra el resultado.

Capítulo 3

Teorema de Existencia

En éste capítulo demostramos la existencia de una solución para el problema 2 cuando $2 < q < 2(n-1)/(n-2)$.

Para $E(\phi)$ definido en 2.4, estamos interesados en minimizar el funcional $E(\cdot)$ restringido al conjunto

$$C^q_{0,b,d} = \left\{ u \in C^1(\overline{M}), b \int_{(\partial M)_1} |u|^q d\sigma + d \int_{(\partial M)_2} |u|^q d\sigma = 1 \right\} \quad \text{con} \quad b, d > 0.$$

Para toda $\phi : M \to \mathbb{R}$ se define

$$G^q_{0,b,d}(M) = \inf_{\substack{\phi \in C^1(\overline{M}) \\ \phi \neq 0}} \frac{E(\phi)}{\left(b \int_{(\partial M)_1} |\phi|^q d\sigma + d \int_{(\partial M)_2} |\phi|^q d\sigma \right)^{2/q}} = \inf_{\phi \in C^q_{0,b,d}} E(\phi).$$

y

$$G_{1,0,0}(M) = \inf_{\phi \in C^1 \overline{M}} \frac{E(\phi)}{\left(\int_M |\phi|^p dv \right)^{2/p}}$$

Sea ϕ la primera función propia del problema de Dirichlet con condición de frontera

$$\begin{cases} \Delta\phi - H\phi + \rho\phi = 0, & \text{en} \quad M \\ \phi = 0, & \text{sobre} \quad \partial M \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $H = \frac{n-2}{4(n-1)} R$.

Escobar en [8] observó que $G^q_{0,b,d}(M) = \operatorname{ínf}_{\varphi \in C^q_{0,b,d}} E(\varphi) = -\infty$ cuando $\rho < 0$. En ésta dirección, encontramos el siguiente resultado.

Proposición 3.1 *Sean b y d reales positivos. $G^q_{0,b,d}(M)$ es finito sí y sólo sí $\rho > 0$.*

Demostración. Asuma $\rho \leq 0$. Por la caracterización variacional del problema anterior se tiene

$$\rho = \operatorname*{ínf}_{\substack{\varphi \in H_0^{1,2}(M) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 + \int_M H\varphi^2}{\int_M \varphi^2},$$

donde $H_0^{1,2}(M)$ denota la clausura del espacio de funciones suaves de soporte compacto en $H^{1,2}(M)$, así podemos tomar $\phi \geq 0$ y usando el principio del Mínimo se puede demostrar que $\phi > 0$ en $M \setminus \partial M$.

Definamos

$$\psi_t = \frac{1 + t\phi}{[bVol((\partial M)_1) + dVol((\partial M)_2)]^{1/q}}$$

Puesto que $\phi = 0$ en ∂M:

$$\begin{aligned}
& b\int_{(\partial M)_1} \psi_t^q + d\int_{(\partial M)_2} \psi_t^q \\
& = b\int_{(\partial M)_1} \frac{(1+t\phi)^q}{bVol((\partial M)_1) + dVol((\partial M)_2)} + d\int_{(\partial M)_2} \frac{(1+t\phi)^q}{bVol((\partial M)_1) + dVol((\partial M)_2)} \\
& = b\int_{(\partial M)_1} \frac{1}{bVol((\partial M)_1) + dVol((\partial M)_2)} + d\int_{(\partial M)_2} \frac{1}{bVol((\partial M)_1) + dVol((\partial M)_2)} \\
& = b\frac{Vol((\partial M)_1)}{bVol((\partial M)_1) + dVol((\partial M)_2)} + d\frac{Vol((\partial M)_2)}{bVol((\partial M)_1) + dVol((\partial M)_2)} \\
& = 1
\end{aligned}$$

Así, $\psi_t \in C^q_{0,b,d}(M)$.

Adicionalmente se tiene

$$
\begin{aligned}
E(\psi_t) &= \int_M |\nabla\psi_t|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M R\psi_t^2 + \frac{n-2}{2}\int_{(\partial M)_1} h_1\psi_t^2 + \frac{n-2}{2}\int_{(\partial M)_2} h_2\psi_t^2 \\
&= \int_M \frac{t^2}{[bVol(\partial M)_1 + dVol(\partial M)_2]^{2/q}}|\nabla\phi|^2 + \int_M \frac{H(1+t^2\phi^2+2t\phi)}{[bVol(\partial M)_1 + dVol(\partial M)_2]^{2/q}} \\
&+ \int_{(\partial M)_1} \frac{h_1(1+t^2\phi^2+2t\phi)}{[bVol(\partial M)_1 + dVol(\partial M)_2]^{2/q}} + \int_{(\partial M)_2} \frac{h_2(1+t^2\phi^2+2t\phi)}{[bVol(\partial M)_1 + dVol(\partial M)_2]^{2/q}} \\
&= \frac{t^2}{A^2}\int_M |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{A^2}\int_M (H + Ht^2\phi^2 + 2Ht\phi) + \frac{1}{A^2}\int_{(\partial M)_1} h_1 + \frac{1}{A^2}\int_{(\partial M)_2} h_2 \\
&= \frac{t^2}{A^2}\rho\int_M \phi^2 - \frac{t^2}{A^2}\int_M H\phi^2 + \frac{1}{A^2}\int_M (H + Ht^2\phi^2 + 2Ht\phi) + \frac{1}{A^2}\int_{(\partial M)_1} h_1 + \frac{1}{A^2}\int_{(\partial M)_2} h_2 \\
&= \frac{t^2}{A^2}\rho\int_M \phi^2 - \frac{t^2}{A^2}\int_M H\phi^2 + \frac{t^2}{A^2}\int_M H\phi^2 + \frac{1}{A^2}2t\int_M H\phi + \frac{1}{A^2}\int_M H \\
&+ \frac{1}{A^2}\int_{(\partial M)_1} h_1 + \frac{1}{A^2}\int_{(\partial M)_2} h_2 \\
&= \frac{1}{A^2}\left[t^2\left(\rho\int_M \phi^2\right) + 2t\int_M H\phi + \int_{(\partial M)_1} h_1 + \int_{(\partial M)_2} h_2\right]
\end{aligned}
$$

donde $A = [aVol(\partial M)_1 + bVol(\partial M)_2]^{1/q}$, $H = \frac{n-2}{4(n-1)}R$ y hemos reemplazado $\frac{n-2}{2}h_1$, $\frac{n-2}{2}h_2$ por h_1 y h_2 respectivamente.
Si $\rho < 0$, tomando $t \to \infty$ se tiene $E(\psi_t) \to -\infty$.

Ahora, si $\rho = 0$ entonces

$$E(\psi_t) = \frac{1}{A^2}\left[2t\int_M H\phi + \int_M H + \int_{(\partial M)_1} h_1 + \int_{(\partial M)_2} h_2\right].$$

Dado que $\phi = 0$ sobre ∂M, por el Lema de Hopf $\frac{\partial\phi}{\partial\eta} < 0$.
Integrando la ecuación $\Delta\phi - H\phi = 0$ y aplicando la identidad de Green se obtiene

$$\int_M H\phi = \int_{\partial M} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} < 0.$$

Tomando $t \to \infty$ encontramos $E(\psi_t) \to -\infty$. De éste modo, como

$$G^q_{0,b,d} = \inf_{\substack{\phi \in C^1(\overline{M}) \\ \phi \neq 0}} \frac{E(\phi)}{\left(b\int_{(\partial M)_1} \phi^q + d\int_{(\partial M)_2} \phi^q\right)^{2/q}} = \inf_{\substack{\phi \in C^q_{0,b,d}(M) \\ \phi \neq 0}} E(\phi) \leq E(\psi_t)$$

se concluye $G^q_{0,b,d}(M) = -\infty$.

Ahora asumamos $G^q_{0,b,d}(M) = -\infty$. Entonces H es una función no cero. En efecto, sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión minimizante. Entonces:

$$E(\varphi_i) = \int_M |\nabla \varphi_i|^2 + \int_M H\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2 < -i$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\int_M H\varphi_i^2 &< -i - \int_M |\nabla \varphi_i|^2 - \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 - \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2 \\
&< -i + \|h_1\|_\infty [Vol(\partial M)_1]^{(q-2)/q} + \|h_2\|_\infty [Vol(\partial M)_2]^{(q-2)/q} \\
&< -i + (\|h_1\|_\infty + \|h_2\|_\infty)C
\end{aligned}$$

donde $C = \max\{[Vol(\partial M)_1]^{(q-2)/q}, [Vol(\partial M)_2]^{(q-2)/q}\}$.
Tomando $i \to \infty$ se tiene $\int_M H\varphi_i^2 \to -\infty$. De donde se concluye que $H \neq 0$.

Recordando que $\varphi \in C^q_{0,b,d}(M)$ sí y sólo sí

$$b\int_{(\partial M)_1} \varphi^q + d\int_{(\partial M)_2} \varphi^q = 1,$$

tomemos $X = \int_{(\partial M)_1} \varphi^q \geq 0$ y $Y = \int_{(\partial M)_2} \varphi^q \geq 0$, así que

$$bX + dY = 1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{(\partial M)_1} h_1\varphi^2 &\leq \sup_{(\partial M)_1} h_1 \int_{(\partial M)_1} \varphi^2 \\
&\leq \sup_{x \in (\partial M)_1} h_1(x) b^{-2/q} [Vol((\partial M)_1)]^{\frac{q-2}{q}} \leq C_1,
\end{aligned}$$

y

$$\int_{(\partial M)_2} h_2\varphi^2 \leq \sup_{x\in(\partial M)_2} h_2(x)d^{-2/q}[Vol((\partial M)_2)]^{\frac{q-2}{q}} \leq C_2,$$

Por lo tanto

$$\int_{(\partial M)_1} h_1\varphi^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi^2 \leq C.$$

En el análisis anterior se tuvo en cuenta que para $2 < q < \frac{2(n-1)}{n-2}$, la desigualdad de Holder con $\alpha = q/2$ y $\beta = q/(q-2)$ implica:

$$\begin{aligned}\left(\int_{(\partial M)_i} \varphi^2\right) &\leq \left(\int_{(\partial M)_i} \varphi^q\right)^{2/q}\left(\int_{(\partial M)_i} 1\right)^{(q-2)/q} \\ &\leq \left(\int_{(\partial M)_i} \varphi^q\right)^{2/q}[Vol(\partial M)_i]^{(q-2)/q}\end{aligned} \tag{3.2}$$

para $i = 1, 2$, donde además tenemos en cuenta que $b\int_{(\partial M)_1} \varphi_i^q < 1$ y $d\int_{(\partial M)_2} \varphi^q < 1$.

Así que, tomando una sucesión minimizante $\{\varphi_i\}$, ésto es, $E(\varphi_i) \to G^q_{0,b,d}$ se tiene,

$$E(\varphi_i) = \int_M |\nabla\varphi_i|^2 + \int_M H\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2 < -i.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_M H\varphi_i^2 &< -i - \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 - \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2 - \int_M |\nabla\varphi_i|^2 \\ &< -i + \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2 - \int_M |\nabla\varphi_i|^2 \\ &< -i + C.\end{aligned}$$

De éste modo tenemos:

$$\int_M \varphi_i^2 \to \infty \quad \text{cuando} \quad i \to \infty.$$

Ahora definimos las funciones $\psi_i = \frac{\varphi_i}{\left(\int_M \varphi_i^2\right)^{1/2}}$.

Note que,

i. $\int_M \psi_i^2 = \frac{1}{\left(\int_M \varphi_i^2\right)} \int_M \varphi_i^2 = 1.$

ii. $\int_{(\partial M)_1} \psi_i^2 = \frac{1}{\left(\int_M \varphi_i^2\right)} \int_{(\partial M)_1} \varphi_i^2 \leq \frac{1}{\int_M \varphi_i^2} b^{-2/q}(Vol(\partial M)_1)^{(q-2)/q} = \frac{C_1}{\int_M \varphi_i^2}.$

iii. $\int_{(\partial M)_2} \psi_i^2 = \frac{1}{\left(\int_M \varphi_i^2\right)} \int_{(\partial M)_2} \varphi_i^2 \leq \frac{d^{-2/q}(Vol(\partial M)_2)^{(q-2)/q}}{\int_M \varphi_i^2} = \frac{C_2}{\int_M \varphi_i^2}.$

Tomando $i \to \infty$ en ii. y iii. se obtiene $\int_{(\partial M)_1} \psi_i^2 \to 0$ y $\int_{(\partial M)_2} \psi_i^2 \to 0$ respectivamente.

El funcional de energía satisface $E(\lambda\varphi) = \lambda^2 E(\varphi)$. Así que

$$E\left(\left(\int_M \varphi_i^2\right)^{1/2} \cdot \psi_i\right) = E(\varphi_i)$$

implica

$$\left(\int_M \varphi_i^2\right) E(\psi_i) = E(\varphi_i) < 0,$$

Por tanto, $E(\psi_i) < 0$.

Como consecuencia,

$$\int_M H\psi_i^2 + \int_{(\partial M)_1} h_1\psi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\psi_i^2 + \int_M |\nabla\psi_i|^2 < 0$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla\psi_i|^2 &< -\int_M H\psi_i^2 - \int_{(\partial M)_1} h_1\psi_i^2 - \int_{(\partial M)_2} h_2\psi_i^2 \\ &< \|H\|_\infty \int_M \psi_i^2 + \|h_1\|_\infty \int_{(\partial M)_1} \psi_i^2 + \|h_2\|_\infty \int_{(\partial M)_2} \psi_i^2\end{aligned}$$

Para i suficientemente grande, las desigualdades i., ii. y iii. implican

$$\int_M |\nabla\psi_i|^2 < K$$

para alguna constante K.

De aquí que la sucesión $\{\psi_i\}$ esté acotada en $H^{1,2}(M)$ ya que

$$\|\psi_i\|^2_{H^{1,2}(M)} = \int_M \psi_i^2 + \int_M |\nabla\psi_i|^2 < 1 + K.$$

Como $H^{1,2}(M)$ es un espacio de Hilbert, existe una subsucesión de $\{\psi_i\}$ que converge débilmente a una función ψ en $H^{1,2}(M)$. Más aún, la función ψ pertenece a $H_0^{1,2}(M)$. En efecto, para $k = 1, 2$

$$\int_{(\partial M)_k} |\psi_i|^2 \xrightarrow{i\to\infty} 0 \quad \text{implica} \quad \int_{(\partial M)_k} \psi^2 = 0.$$

En el resultado anterior se usó que $H^{1,2}(M) \hookrightarrow L^2(\partial M)$.
Usando todo lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\rho &= \operatorname*{\acute{i}nf}_{\varphi\in H_0^{1,2}(M)} \frac{\int_M |\nabla\varphi|^2 + \int_M H\varphi^2}{\int_M \varphi^2} \\ &\leq \int_M |\nabla\psi|^2 + \int_M H\psi^2 \\ &\leq \liminf_{i\to\infty} E(\psi_i) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

por lo tanto, $G^q_{0,b,d}(M) = -\infty$ implica $\rho \leq 0$.

Observación 3.1 *Del teorema anterior, si $G^q_{0,b,d} = -\infty$ entonces $\rho \leq 0$. De la caracterización variacional de ρ se sigue que $H = \frac{n-2}{4(n-1)} R \neq 0$ y $H(x) < 0$ para algún $x \in M$. Por tanto, si $R = 0$ entonces $H = 0$ y así $G^q_{0,b,d}$ es fínito y $\rho > 0$. De modo que, para dominios de $\mathbb{R}^n$ (curvatura escalar $R = 0$) se garantiza que $G^q_{0,b,d}$ es finito y $\rho > 0$.*

Estamos interesados en relacionar los números $G^q_{0,b,d}(M)$ y $G_{1,0,0}(M)$. Es conocido que existe $\varphi \in C^1(\overline{M})$, $\varphi \neq 0$ en M tal que $G_{1,0,0} = E(\varphi)$. En la siguiente proposición usamos éste hecho para comparar $G^q_{0,b,d}(M)$ con $G_{1,0,0}(M)$.

Proposición 3.2 *Si $G_{1,0,0} \leq 0$ entonces $G^q_{0,b,d} \leq 0$.*

Demostración. Mostraremos primero que $G_{1,0,0} = 0$ implica $G^q_{0,b,d} = 0$. En efecto, sea φ tal que $G_{1,0,0} = E(\varphi)$. Entonces

$$0 = G_{1,0,0} = \frac{E(\varphi)}{\left(\int_M \varphi^p\right)^{2/p}} \quad \text{implica} \quad E(\varphi) = 0.$$

Así,

$$G^q_{0,b,d}(M) \leq \frac{E(\varphi)}{\left(b\int_{(\partial M)_1}\varphi^q + d\int_{(\partial M)_2}\varphi^q\right)^{2/p}} = 0.$$

Por tanto, $G^q_{0,b,d}(M) \leq 0$.

Ahora demostramos que $G^q_{0,b,d}(M) = 0$. Supongamos que $G^q_{0,b,d} < 0$. Considere una sucesión minimizante $\{\varphi_i\}$, ésto es, $E(\varphi_i) \to G^q_{0,b,d}(M)$. Entonces:

$$\frac{E(\varphi_i)}{\left(b\int_{(\partial M)_1}\varphi^q + d\int_{(\partial M)_2}\varphi^q\right)^{2/p}} < 0 \quad \text{implica} \quad E(\varphi_i) < 0$$

Así que,

$$\frac{E(\varphi_i)}{\left(\int_M \varphi_i^p\right)^{2/p}} < 0 = G_{1,0,0}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $G^q_{0,b,d}(M) = 0$.

Ahora supongamos que $G_{1,0,0} < 0$. Sea $\varphi \in C_{1,0,0}$ tal que $G_{1,0,0} = E(\varphi)$. Esto es,

$$G_{1,0,0} = \frac{E(\varphi)}{\left(\int_M \varphi^p\right)^{2/p}} < 0$$

Entonces $E(\varphi) < 0$.

De la definición tenemos

$$G^q_{0,b,d} < \frac{E(\varphi)}{\left(b\int_{(\partial M)_1}\varphi^q + d\int_{(\partial M)_2}\varphi^q\right)^{2/p}} < 0.$$

Luego, $G^q_{0,b,d}(M) < 0$.

Usando los resultados previos, a continuación demostraremos el resultado principal de éste trabajo: si $G^q_{0,b,d}$ es finito, entonces existe una función positiva $\varphi \in C^q_{0,b,d}$ tal que $G^q_{0,b,d}(M) = E(\varphi)$, es decir, el ínfimo se alcanza.

Teorema 3.1 *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana con frontera y dimensión $n \geq 3$. Si $G^q_{0,b,d}(M)$ es finito, entonces existe una función positiva $\varphi \in C^q_{0,b,d}$ tal que $G^q_{0,b,d}(M) = E(\varphi)$ y satisface el problema*

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \frac{n-2}{4(n-1)}R\varphi = 0, & \text{en} \quad M \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{n-2}{2}h_1\varphi = \frac{\lambda}{2}bq\varphi^{q-1}, & \text{sobre} \quad (\partial M)_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{n-2}{2}h_2\varphi = \frac{\lambda}{2}dq\varphi^{q-1}, & \text{sobre} \quad (\partial M)_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

donde $1 < q < 2(n-1)/(n-2)$ y λ es una constante.

Demostración. Inicialmente probaremos que existe una función $\varphi \in C^q_{0,b,d}$ tal que $G^q_{0,b,d}(M) = E(\varphi)$. Para ello consideramos tres casos:

Caso i. Primero asumamos que $G^q_{0,b,d} > 0$. Entonces por la proposición anterior $G_{1,0,0}(M) > 0$. Sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión minimizante de funciones en $C^q_{0,b,d}$; ésto es,

$$E(\varphi_i) \xrightarrow{i\to\infty} G^q_{0,b,d}(M).$$

Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq N$, entonces:

$$G^q_{0,b,d}(M) \leq E(\varphi_i) \leq G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon. \tag{3.4}$$

De aquí que

$$G_{1,0,0}(M) \leq \frac{E(\varphi_i)}{\left(\int_M \varphi_i^p\right)^{2/p}} \leq \frac{G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon}{\left(\int_M \varphi_i^p\right)^{2/p}}.$$

Por tanto,

$$\left(\int_M \varphi_i^p\right)^{2/p} \leq \frac{G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon}{G_{1,0,0}(M)}.$$

Usando la desigualdad de Hölder con $\alpha = p/2$ y $\beta = p/(p-2)$ y el resultado anterior obtenemos:

$$\int_M \varphi_i^2 \leq \left(\int_M \varphi_i^p\right)^{2/p} \cdot [Vol(M)]^{\frac{p-2}{p}} \leq K$$

donde $K = \frac{G^q_{0,b,d}(M)+\varepsilon}{G_{1,0,0}(M)} \cdot [Vol(M)]^{\frac{p-2}{p}}$.

Como

$$E(\varphi_i) = \int_M |\nabla\varphi_i|^2 + \int_M H\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2$$

la desigualdad 3.2 implica

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla\varphi_i|^2 &\leq -\int_M H\varphi_i^2 - \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 - \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2 + G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon \\
&\leq \|H\|_\infty \int_M \varphi_i^2 + \|h_1\|_\infty \int_{(\partial M)_1} \varphi_i^2 + \|h_2\|_\infty \int_{(\partial M)_2} \varphi_i^2 + G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon \\
&\leq \|H\|_\infty \frac{G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon}{G_{1,0,0}(M)} \cdot [Vol(M)]^{\frac{p-2}{p}} + \|h_1\|_\infty C_1 + \|h_2\|_\infty C_2 + G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon
\end{aligned}$$

donde $C_1 = \left(\frac{1}{b}\right)^{2/q} [Vol(\partial M)_1]^{\frac{q-2}{q}}$ y $C_2 = \left(\frac{1}{d}\right)^{2/q} [Vol(\partial M)_2]^{\frac{q-2}{q}}$. En el cálculo anterior usamos 3.2.

Por tanto, las funciones $\{\varphi_i\}$ son uniformemente acotadas en $H^{1,2}(M)$.

Para $1 < q < \frac{2(n-1)}{n-2}$, los encajes $H^{1,2}(M) \hookrightarrow L^q(\partial M)$ y $H^{1,2}(M) \hookrightarrow L^2(M)$ son compactos; por tanto existe una subsucesión de $\{\varphi_i\}$ que también llamaremos $\{\varphi_i\}$, la cual converge débilmente a $\varphi \in H^{1,2}(M)$ y satisface:

i. $b\int_{(\partial M)_1} \varphi_i^q + d\int_{(\partial M)_2} \varphi_i^q = 1$ implica $b\int_{(\partial M)_1} \varphi^q + d\int_{(\partial M)_2} \varphi^q = 1$.

ii. $\int_M H\varphi^2 = \lim_{i\to\infty} \int_M H\varphi_i^2$.

iii. $\int_{(\partial M)_1} h_1\varphi^2 = \lim_{i\to\infty} \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2$.

iv. $\int_{(\partial M)_2} h_2\varphi^2 = \lim_{i\to\infty} \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2$.

Como $\varphi_i \rightharpoonup \varphi$ en $H^{1,2}(M)$ y $\varphi_i \to \varphi$ en $L^2(M)$, entonces por teorema 1.3

$$\int_M |\nabla\varphi|^2 \leq \liminf_{i\to\infty} \int_M |\nabla\varphi_i|^2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E(\varphi) &= \int_M |\nabla\varphi|^2 + \int_M H\varphi^2 + \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi^2 \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} \int_M |\nabla\varphi_i|^2 + \int_M H\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi_i^2 \\
&= G^q_{0,b,d}(M).
\end{aligned}$$

Luego, $E(\varphi) = G^q_{0,b,d}(M)$.

Caso ii. Supongamos que $G^q_{0,b,d} = 0$. Entonces $G_{1,0,0} \geq 0$. Si $G_{1,0,0} > 0$ la prueba es idéntica al caso anterior. Supongamos que $G_{1,0,0} = 0$, entonces existe una función positiva φ tal que $E(\varphi) = 0$. Sea $\lambda > 0$ tal que $\psi = \lambda\varphi \in C^q_{0,b,d}$; de lo anterior tenemos que $E(\psi) = 0 = G^q_{0,b,d}$.

Caso iii. Ahora suponemos $G^q_{0,b,d}(M) < 0$. Sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión minimizante tal que

$$b\int_{(\partial M)_1} \varphi_i^q + d\int_{(\partial M)_2} \varphi_i^q = 1.$$

Supongamos que $\int_M \varphi_i^2 \xrightarrow{i\to\infty} \infty$. Dado $\varepsilon > 0$

$$G^q_{0,b,d}(M) < E(\varphi_i) < G^q_{0,b,d}(M) + \varepsilon < 0.$$

Considere las funciones $\psi_i = \frac{\varphi_i}{\left(\int_M \varphi_i^2\right)^{1/2}}$. Observe que para $k = 1, 2$ la función ψ satisface:

$$\int_M \psi_i^2 = 1 \quad \text{y} \quad \int_{(\partial M)_k} \psi_i^2 \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

Por otro lado, $E(\lambda\varphi) = \lambda^2 E(\varphi)$ implica $E\left(\left(\int_M \varphi_i^2\right)^{1/2} \psi_i\right) = E(\varphi_i) < 0$ Por lo tanto,

$$E(\psi_i) < 0.$$

En consecuencia,

$$\int_M H\psi_i^2 + \int_{(\partial M)_1} h_1\psi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\psi_i^2 + \int_M |\nabla\psi_i|^2 < 0$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla\psi_i|^2 &< -\int_M H\psi_i^2 - \int_{(\partial M)_1} h_1\psi_i^2 + \int_{(\partial M)_2} h_2\psi_i^2 \\ &< \|H\|_\infty \int_M \psi_i^2 + \|h_1\|_\infty \int_{(\partial M)_1} \psi_i^2 + \|h_2\|_\infty \int_{(\partial M)_2} \psi_i^2\end{aligned}$$

Para i suficientemente grande se obtiene,

$$\int_M |\nabla \psi_i|^2 < K, \quad \text{para alguna constante K.}$$

De aquí que la sucesión $\{\psi_i\}$ esté acotada en $H^{1,2}(M)$ y por tanto existe una subsucesión débilmente convergente a una función $\psi \in H^{1,2}(M)$. Más aún, la función $\psi \in H_0^{1,2}(M)$. En efecto, para $k = 1, 2$:

$$\int_{(\partial M)_k} \psi_i^2 \xrightarrow{i\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{(\partial M)_k} \psi^2 = 0$$

Como $G^q_{0,b,d}(M)$ es finito, entonces el primer valor propio del problema 3.1 es estrictamente positivo, ésto es, $\rho > 0$. De aquí obtenemos que,

$$0 < \rho \leq \int_M |\nabla \psi|^2 + \int_M H\psi^2 \leq \liminf_{i\to\infty} E(\psi_i)$$

lo cual es una contradicción porque $E(\psi_i) < 0$.
Por lo tanto la sucesión $\int_M \varphi_i^2$ está acotada.
Razonando como en el caso i encontramos una función φ tal que $G^q_{0,b,d}(M) = E(\varphi)$.
Sea $G(u) = b\int_{(\partial M)_1} u^q d\sigma + d\int_{(\partial M)_2} u^q$, dado que φ es el mínimo del funcional E sujeto a la restricción $G(u) = 1$; usando multiplicadores de Lagrange tenemos,

$$E'(\varphi)(\psi) = \lambda G'(\varphi)(\psi)$$

para algún número real λ y para toda función $\psi \in H^{1,2}(M)$. Por lo tanto

$$\int_M \nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \int_M H\varphi\psi + \int_{(\partial M)_1} h_1\varphi\psi + \int_{(\partial M)_2} h_2\varphi\psi = \lambda\left\{bq\int_{(\partial M)_1}\varphi^{q-1}\psi + dq\int_{(\partial M)_2}\varphi^{q-1}\psi\right\}.$$

Si $\psi = \varphi$, entonces $G^q_{0,b,d}(M) = E(\varphi) = \frac{\lambda}{2}G(\varphi) = \frac{\lambda}{2}q$ y por tanto la función φ es una solución débil del problema 3.3. Haciendo un reescalamiento en la función φ obtenemos una métrica conforme $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g$ con curvatura escalar cero y curvaturas medias constantes b y d sobre cada componente conexa de la frontera de M.

Argumentos estándar en regularidad elíptica (Teorema de Cherrier) implican que toda solución en H^1 es suave hasta la frontera. El minimizante puede ser tomado como una función no negativa ya que, para toda función $u \in H^1(M)$

$$E(|u|) \leq E(u).$$

Como la función minimizante φ está en $C^q_{0,b,d}$, entonces $\varphi \neq 0$ y por el Principio del Máximo φ positiva en el interior de M.
Si $\varphi(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \partial M$, entonces las condiciones de frontera del problema 3.3 implican $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$ en x_0, lo cual contradice el Lema de Punto Frontera.
Por lo tanto, la función minimizante φ es positiva en $\overline{M}$.

Corolario 3.1 *Sean b y d números reales positivos, entonces* $G^q_{0,b,d} \geq 0$ *sí y sólo sí* $G_{1,0,0} \geq 0$ *y* $G^q_{0,b,d} = 0$ *sí y sólo sí* $G_{1,0,0} = 0$.

Conclusiones

1. En éste trabajo:

   a) Se definió el cociente de Sobolev $G^q_{0,b,d}(M)$ y se dió una condición necesaria y suficiente para que $G^q_{0,b,d}(M)$ sea finito.

   b) En el caso en que $G^q_{0,b,d}(M)$ es finito se demostró un teorema de existencia para el caso subcrítico del problema propuesto.

   c) Se demostró que $G^q_{0,b}(M)$ está acotado superiormente por el cociente de Sobolev $G^q_{0,b}(\mathbb{R}^n_+)$. Este estimativo proporciona un criterio para garantizar la existencia de minimizadores cuando p y q son los exponentes críticos de Sobolev.

2. Cuando $a > 0$, modificaciones menores en el artículo [11] demuestran que toda métrica g es conforme a una métrica $\tilde{g}$ con curvatura escalar constante y curvaturas medias constantes en cada componente conexa de la frontera de M.

3. El problema propuesto considera una variedad Riemanniana M cuya frontera ∂M tiene dos componentes conexas $(\partial M)_1$ y $(\partial M)_2$. La misma demostración es válida para el problema en una variedad cuya frontera tiene n componentes conexas.

4. Escobar en [11] demuestra un resultado para funciones de curvatura media prescrita más generales que las propuestas en éste trabajo de investigación. Sin embargo, ésta propuesta cubre algunos casos de variedades de dimensión 4 y 5 no incluídos en el trabajo del profesor Escobar.

Bibliografía

[1] Aubin, T., equations differentielles non lineaires et probleme de Yamabe concernant la courbure scalaire. J. Math. Pures Appl. (9) 55(3), 269 a 296 (1976)

[2] Aubin, T., Problemes isoperimétriques et espaces de Sobolev, Jour. Diff. Geom. 11, 1976, pp 573-598.

[3] Beckner, W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality.Annals of Mathematics. Second Series, Vol. 138, No. 1 (Jul., 1993), pp. 213-242

[4] Chang,A., Xu,X., Yang, P. A perturbation result for the prescribing mean curvature, Math. Ann., 310 (1998), pp. 473 a 496

[5] Cherrier, P. Problemes de Neumann non lineaires sur les varietes riemanniennes, J. Funct. Anal. 57 (1984), no. 2, 154 a 206.

[6] Escobar, J. F., The Yamabe problem on manifolds with boundary, J. Diff. Geom., 35 (1992), 21 a 84.

[7] Escobar, J. F., Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary, Annals of Mathematics, 136 (1992), 1 a 50.

[8] Escobar, J. F., Addendum Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary, Ann. of Math. (2) 139 (1994), 3, 749 a 750.

[9] Escobar, J. F. Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary, Calc. Var. Partial Diferential Equations 4(1996), no. 6, 559 a 592.

[10] Escobar, J. F., Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate, Comm. Pure Appl. Math., 43 (1990), 857 a 883.

[11] Escobar, J. F., Conformal deformation of a Riemannian metric to a constant scalar curvature metric with constant mean curvature on the boundary, Indiana Univ. Math. J., 45(4) (1996), 917 a 943.

[12] Escobar, J. F., Garcia, G., Conformal metrics on the ball with zero scalar curvature and prescribed mean curvature on the boundary, J. Funct. Anal., 211(1) (2004), 71 a 152.

[13] Escobar, J. F., Schoen, R., Conformal metrics with prescribed scalar cur- vature, Invent. Math., 86(2) (1986), 243 a 254.

[14] Escobar, J. F., Sharp constant in a Sobolev trace inequality, Indiana Univ. Math. J. 37, 1998, pp. 687-698.

[15] Lee, J., Parker, T.: The Yamabe problem. Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) 17(1), 37 a 91 (1987)

[16] Lou, Yuan. Uniqueness and non-uniqueness of metrics with prescibed scalar curvature on compact manifolds, Indiana University Mathematical Journal, 47 No 3 (1998)

[17] Obata, M., The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds, J. Diff. Geom., 6 (1971), 247 a 258.

[18] Schoen, R., Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. J. Diff. Geom. 20(2), 479 a 495 (1984)

[19] Schoen, R., Zhang, D., Prescribed scalar curvature on the n-sphere, Cal. Var. and Partial Differential Equations, 4 (1996), pp. 1 a 25

[20] Talenti, G., Best constant in Sobolev inequality, Ann. di Matematica 110, 1976, pp 353-372.

[21] Trudinger, N., Remarks concerning the conformal deformation of a Riemannian structure on compact manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 22, 265 a 274 (1968)

[22] Yamabe, H., On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Osaka Math. J. 12, 21 a 37 (1960)

[23] Jost, J. Postmodern Analysis. Third Edition. Springer-Verlag. (2005)

[24] García, C. Una Generalización del Teorema de la Aplicación de Riemann. Universidad del Valle. (2007)